理论物理学习辅导丛书

周衍柏 编

理论力学教程（第二版）

学习辅导书

张宏宝

高等教育出版社

目　　录

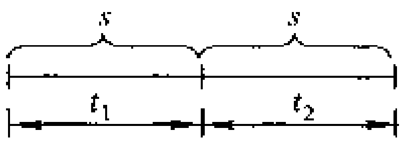
第一章　质点力学

1.1　沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离 s 的时间为 t_1，而通过下一等距离 s 的时间为 t_2. 试证明枪弹的减速度（假定是常数）为

$$\frac{2s(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

证　由题可知示意图如题 1.1.1 图：

设开始计时的时刻速度为 v_0，由题可知枪弹作匀减速运动，设减速度大小为 a.



题 1.1.1 图

则有：

$$\begin{cases} s = v_0t_1 - \dfrac{1}{2}at_1^2 & ① \\ 2s = v_0(t_1+t_2) - \dfrac{1}{2}a(t_1+t_2)^2 & ② \end{cases}$$

由式①我们可知

$$v_0 = \frac{s}{t_1} + \frac{1}{2}at_1 \qquad ③$$

把③代入②得

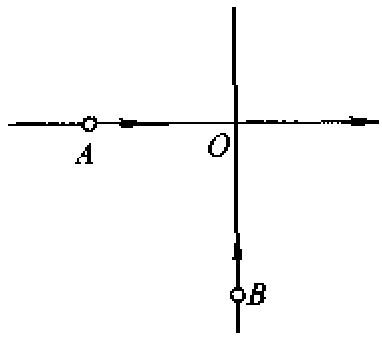
$$a = \frac{2s(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

证明完毕.

1.2　某船向东航行，速率为 15 km/h，在正午经过某一灯塔. 另一船以同样速度向北航行，在下午 1 时 30 分经过此灯塔. 问在什么时候，两船的距离最近？最近的距离是多少？

解　由题可知，以灯塔为坐标原点建立直角坐标如题 1.2.1

图. 设 A 船经过 t_0 小时向东经过灯塔，则向北行驶的 B 船经过 $\left(t_0+1\dfrac{1}{2}\right)$ 小时经过灯塔.



题 1.2.1 图

任意时刻 A 船的坐标

$x_A=-(15t_0-15t)$, $y_A=0$

B 船坐标 $x_B=0$, $y_B=-\left[15\left(t_0+1\dfrac{1}{2}\right)-15t\right]$

则 AB 船间距离的平方

$$d^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$$

即

$$d^2=(15t_0-15t)^2+\left[15\left(t_0+1\frac{1}{2}\right)-15t\right]^2$$

$$=450t^2-(900t_0+675)t+225t_0^2+225\left(t_0+1\frac{1}{2}\right)^2$$

d^2 对时间 t 求导

$$\frac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t}=900t-(900t_0+675)$$

AB 船相距最近，即 $\dfrac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t}=0$，所以

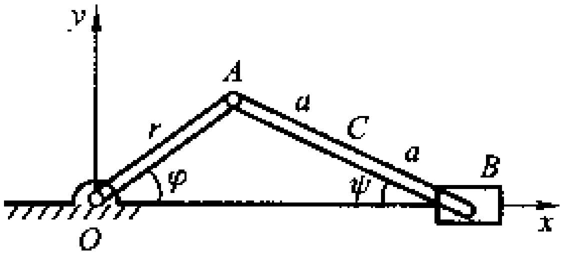
$$t-t_0=\frac{3}{4}\ \mathrm{h}$$

即午后 45 分钟时两船相距最近.

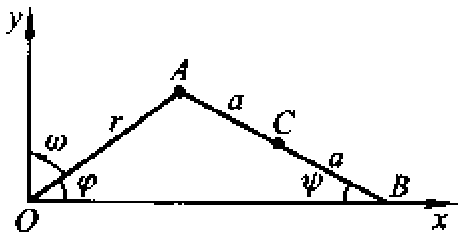
$$最近距离\ s_{\min}=\sqrt{\left(15\times\frac{3}{4}\right)^2+\left(15\times\frac{3}{4}-15\times\frac{3}{2}\right)^2}\ \mathrm{km}$$
$$=15.9\ \mathrm{km}$$

1.3 曲柄 $\overline{OA}=r$，以匀角速 ω 绕定点 O 转动，如题 1.3.1 图. 此曲柄借连杆 AB 使滑块 B 沿直线 Ox 运动. 求连杆上 C 点的轨道方程及速度. 设 $\overline{AC}=\overline{CB}=a$，$\angle AOB=\varphi$，$\angle ABO=\psi$.

解 (1) 如题 1.3.2 图，由题分析可知，点 C 的坐标为



题 1.3.1 图



题 1.3.2 图

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + a\cos\psi & ① \\ y = a\sin\psi & ② \end{cases}$$

又由于在△AOB 中，有$\dfrac{r}{\sin\psi} = \dfrac{2a}{\sin\varphi}$（正弦定理），

所以
$$\sin\varphi = \frac{2a\sin\psi}{r} = \frac{2y}{r} \qquad ③$$

联立①②③运用 $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

由①可得
$$\cos\varphi = \frac{x - a\cos\psi}{r} = \frac{x - \sqrt{a^2 - y^2}}{r} \qquad ④$$

$④^2 + ③^2 = 1$，得

$$\frac{4y^2}{r^2} + \frac{x^2 + a^2 - y^2 - 2x\sqrt{a^2 - y^2}}{r^2} = 1$$

得
$$3y^2 + x^2 + a^2 - r^2 = 2x\sqrt{a^2 - y^2}$$

化简整理可得

$$4x^2(a^2 - y^2) = (x^2 + 3y^2 + a^2 - r^2)^2$$

此即为 C 点的轨道方程.

（2）要求 C 点的速度，即先对①②式分别求导

$$\begin{cases} \dot{x} = -r\omega\sin\varphi - \dfrac{r\omega\cos\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi \\ \dot{y} = \dfrac{r\omega\cos\varphi}{2} \end{cases}$$

其中 $\omega = \dot{\varphi}$

又因为
$$r\sin\varphi = 2a\sin\psi$$

对两边分别求导

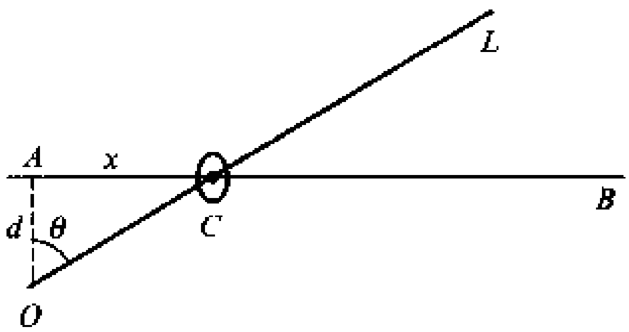
故有 $$\dot{\psi}=\frac{r\omega\cos\varphi}{2a\cos\psi}$$

所以 $$\begin{aligned} V&=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\\ &=\sqrt{\left(-r\omega\sin\varphi-\frac{r\omega\cos\varphi}{2\cos\psi}\sin\psi\right)^2+\frac{r^2\omega^2\cos^2\varphi}{4}}\\ &=\frac{r\omega}{2\cos\psi}\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)}\end{aligned}$$

1.4 细杆 OL 绕 O 点以匀角速 ω 转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动. 图中的 d 为一已知常数，试求小环的速度及加速度的量值.

解 如题 1.4.1 图所示，OL 绕 O 点以匀角速度转动，C 在 AB 上滑动，因此 C 点有一个垂直杆的速度分量

$$v_{\perp}=\omega\times\overline{OC}=\omega\sqrt{d^2+x^2}$$



题 1.4.1 图

C 点速度 $$v=\frac{v_{\perp}}{\cos\theta}=v_{\perp}\sec\theta=\omega d\sec^2\theta=\omega\frac{d^2+x^2}{d}$$

又因为 $$\dot{\theta}=\omega$$

所以 C 点加速度 $$\begin{aligned} a&=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\omega d\cdot 2\sec\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\dot{\theta}\\ &=2d\omega^2\sec^2\theta\tan\theta=\frac{2\omega^2x(d^2+x^2)}{d^2}\end{aligned}$$

1.5 矿山升降机作加速度运动时，其变加速度可用下式表示：

$$a=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)$$

式中 c 及 T 为常数，试求运动开始 t 秒后升降机的速度及其所走

过的路程. 已知升降机的初速度为零.

解 由题可知,变加速度表示为

$$a = c\left(1 - \sin\frac{\pi t}{2T}\right) \qquad ①$$

由加速度的微分形式我们可知

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad ②$$

把②代入①即得

$$\mathrm{d}v = c\left(1 - \sin\frac{\pi t}{2T}\right)\mathrm{d}t$$

对等式两边同时积分

$$\int_0^v \mathrm{d}v = c\int_0^t\left(1 - \sin\frac{\pi t}{2T}\right)\mathrm{d}t$$

可得:

$$v = ct + \frac{2T}{\pi}c\cos\frac{\pi t}{2T} + D \quad (D\text{ 为常数})$$

代入初始条件: $t = 0$ 时, $v = 0$

故 $D = -\dfrac{2T}{\pi}c$

即 $v = c\left[t + \dfrac{2T}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi t}{2T} - 1\right)\right]$

又因为 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

所以 $\mathrm{d}s = c\left[t + \dfrac{2T}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi}{2T}t - 1\right)\right]\mathrm{d}t$

对等式两边同时积分,可得:

$$s = c\left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{2T}{\pi}\left(\frac{2T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2T} - t\right)\right]$$

1.6 一质点沿位矢及垂直于位矢的速度分别为 λr 及 $\mu\theta$,式中 λ 及 μ 是常数. 试证其沿位矢及垂直于位矢的加速度为

$$\lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}, \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$$

解 由题可知质点沿位矢速度

$$v_{/\!/} = \lambda r \qquad ①$$

沿垂直于位矢速度

$$v_{\perp} = \mu\theta \qquad ②$$

又因为 $v_{/\!/} = \dot{r} = \lambda r$，即

$$\dot{r} = \lambda r \qquad ③$$

$$v_{\perp} = \dot{\theta} r = \mu\theta，\text{即}\ \dot{\theta} = \frac{\mu\theta}{r} \qquad ④$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{i}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\boldsymbol{j})$$（取位矢方向 $\boldsymbol{i}$，垂直位矢方向 $\boldsymbol{j}$）

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\boldsymbol{i}) = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\boldsymbol{i} + \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\dot{\theta}\boldsymbol{j}) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\boldsymbol{j} + r\frac{d\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{j} + r\ddot{\theta}\boldsymbol{j} - r\dot{\theta}^2\boldsymbol{i}$$

故 $\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{j}$

即 沿位矢方向加速度 $a_{/\!/} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ ⑤

垂直位矢方向加速度 $a_{\perp} = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ ⑥

对③求导 $\ddot{r} = \lambda\dot{r} = \lambda^2 r$ ⑦

对④求导 $\ddot{\theta} = -\frac{\mu\theta}{r^2}\dot{r} + \frac{\mu}{r}\dot{\theta}$

$$= \mu\theta\left(\frac{\mu}{r} + \lambda\right) \qquad ⑧$$

把③④⑦⑧代入⑤⑥式中可得

$$a_{/\!/} = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$a_{\perp} = \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$$

1.7 试自

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

出发，计算 $\ddot{x}$ 及 $\ddot{y}$. 并由此推出径向加速度 a_r 及横向加速度 a_θ.

解　由题可知 $\begin{cases} x = r\cos\theta & ① \\ y = r\sin\theta & ② \end{cases}$

对①求导　$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta \cdot \dot{\theta}$　③

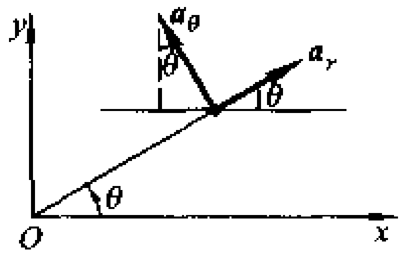
对③求导　$\ddot{x} = \ddot{r}\cos\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta$　④

对②求导　$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$　⑤

对⑤求导　$\ddot{y} = \ddot{r}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2\sin\theta$　⑥

对于加速度 a，我们有如下关系见题 1.7.1 图.

即 $\begin{cases} \ddot{x} = a_r\cos\theta - a_\theta\sin\theta & ⑦ \\ \ddot{y} = a_r\sin\theta + a_\theta\cos\theta & ⑧ \end{cases}$



题 1.7.1 图

对⑦⑧两式分别作如下处理：⑦ × $\cos\theta$，⑧ × $\sin\theta$，

即得 $\begin{cases} \ddot{x}\cos\theta = a_r\cos^2\theta - a_\theta\sin\theta\cos\theta & ⑨ \\ \ddot{y}\sin\theta = a_r\sin^2\theta + a_\theta\sin\theta\cos\theta & ⑩ \end{cases}$

⑨ + ⑩得　$a_r = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta$　⑪

把④⑥代入⑪

得

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

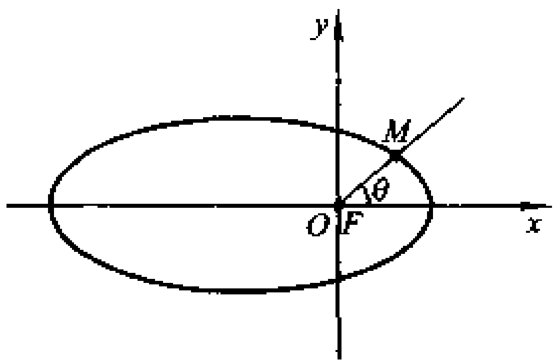
同理可得

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

1.8　直线 FM 在一给定的椭圆平面内以匀角速 ω 绕其焦点 F 转动. 求此直线与椭圆的交点 M 的速度. 已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

式中 a 为椭圆的半长轴，e 为偏心率，都是常数.



题 1.8.1 图

解　以焦点 F 为坐标原点，运动如题 1.8.1 图所示，则

M 点坐标 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

对 x,y 两式分别求导

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

故 $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2$

$= \dot{r}^2 + r^2\omega^2$

如图所示的椭圆的极坐标表示法为

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

对 r 求导可得 （利用$\dot{\theta} = \omega$）

$$\dot{r} = \frac{e\sin\theta\omega}{a(1-e^2)}r^2$$

又因为 $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a(1-e^2)} + \dfrac{e\cos\theta}{a(1-e^2)}$

即 $\cos\theta = \dfrac{a(1-e^2)-r}{re}$

所以 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \dfrac{a^2(1-e^2)^2 + r^2 - 2ar(1-e^2)}{r^2e^2}$

故有 $v^2 = \dfrac{e^2\omega^2r^4}{a^2(1-e^2)^2}\sin^2\theta + r^2\omega^2$

$= \dfrac{e^2\omega^2r^4}{a^2(1-e^2)^2}\left[1 - \dfrac{a^2(1-e^2)^2 + r^2 - 2ar(1-e^2)}{r^2e^2}\right] + r^2\omega^2$

$= \dfrac{r^2\omega^2}{a^2(1-e^2)} \cdot \left[\dfrac{e^2r^2 - r^2 + 2ar(1-e^2)}{1-e^2}\right]$

$= \dfrac{\omega^2r^2}{b^2}(2a-r)r$

即 $v = \dfrac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)}$

（其中 $b^2 = (1-e^2)a^2$， b 为椭圆的半短轴）

1.9 质点作平面运动，其速率保持为常数．试证其速度矢量

$\boldsymbol{v}$ 与加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 正交.

证 质点作平面运动,设速度表达式为

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}$$

令 θ 为位矢与 x 轴正向的夹角,所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+v_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+v_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t}\\&=\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}-v_y\dot{\theta}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_x\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}&=\left[\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}-v_y\dot{\theta}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_x\dot{\theta}\right)\boldsymbol{j}\right]\cdot(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j})\\&=v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}-v_xv_y\dot{\theta}+v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}+v_xv_y\dot{\theta}\\&=v_x\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+v_y\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

又因为速率保持为常数,即

$$v_x^2+v_y^2=C,C\text{ 为常数}.$$

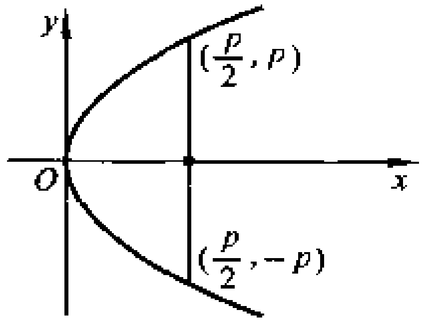
对等式两边求导 $2v_x\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}+2v_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=0$

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}=0$

即速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 与加速度矢量 $\boldsymbol{a}$ 正交.

1.10 一质点沿着抛物线 $y^2=2px$ 运动.其切向加速度的量值为法向加速度量值的 $-2k$ 倍.如此质点从正焦弦的一端 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$以速度 u 出发,试求其达到正焦弦另一端时的速率.

解 由题可知运动轨迹如题 1.10.1 图所示.



题 1.10.1 图

则质点切向加速度 $a_t=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

法向加速度 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$

而且有关系式

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2k\frac{v^2}{\rho} \qquad ①$$

又因为

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad ②$$

$$y^2 = 2px,$$

所以

$$y' = \frac{p}{y} \qquad ③$$

$$y'' = -\frac{p^2}{y^3} \qquad ④$$

联立①②③④

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -2kv^2\frac{\dfrac{p^2}{|y^3|}}{\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad ⑤$$

又

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$$

把 $y^2 = 2px$ 两边对时间求导得

$$\dot{x} = \frac{y\dot{y}}{p}$$

又因为

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

所以

$$\dot{y}^2 = \frac{v^2}{1+\dfrac{y^2}{p^2}} \qquad ⑥$$

把⑥代入⑤

$$\frac{v}{\left(1+\dfrac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -2kv^2\cdot\frac{\dfrac{p^2}{y^3}}{\left(1+\dfrac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

即可化为

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -2kp\frac{\mathrm{d}y}{y^2+p^2}$$

对等式两边积分

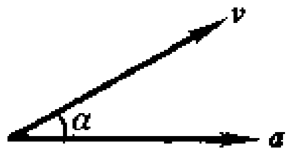
$$\int_u^v \frac{\mathrm{d}v}{v} = -2kp\int_p^{-p} \frac{\mathrm{d}y}{y^2+p^2}$$

所以 $v = ue^{-k\pi}$

1.11 质点沿着半径为 r 的圆周运动，其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变．求质点的速度随时间而变化的规律．已知初速度为 v_0．

解 由题可知速度和加速度有关系如题1.11.1图．

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{v^2}{r} = a\sin\alpha \\ a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\cos\alpha \end{cases}$$



题1.11.1图

两式相比可得

$$\frac{v^2}{r\sin\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即 $\dfrac{1}{r}\cot\alpha\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{v^2}$

对等式两边分别积分

$$\int_0^t \frac{1}{r}\cot\alpha\cdot\mathrm{d}t = \int_{v_0}^v \frac{\mathrm{d}v}{v^2}$$

即 $\dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{v_0} - \dfrac{t}{r}\cot\alpha$

此即质点的速度随时间而变化的规律．

1.12 在上题中，试证其速度可表为

$$v = v_0 e^{(\theta-\theta_0)\cot\alpha}$$

式中 θ 为速度矢量与 x 轴间的夹角，且当 $t=0$ 时，$\theta=\theta_0$．

证 由题1.11可知质点运动有关系式

$$\begin{cases} \dfrac{v^2}{r} = a\sin\alpha & ① \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a\cos\alpha & ② \end{cases}$$

所以$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\omega$，联立①②，有

$$\frac{dv}{d\theta}\cdot\omega = \frac{v^2}{r\sin\alpha}\cos\alpha .$$

又因为 $v=\omega r$,

所以 $\frac{dv}{v}=\cot\alpha d\theta$

对两边分别积分,利用初始条件 $t=0$ 时,$\theta=\theta_0$,

$$v=v_0 e^{(\theta-\theta_0)\cot\alpha}$$

1.13 假定一飞机从 A 处向东飞到 B 处,而后又向西飞回原处.飞机相对于空气的速度为 $\boldsymbol{v}'$,而空气相对于地面的速度则为 $\boldsymbol{v}_0$. A 与 B 之间的距离为 l.飞机相对于空气的速度 v'保持不变.

(a) 假定 $v_0=0$,即空气相对于地面是静止的,试证来回飞行的总时间为

$$t_0=\frac{2l}{v'}$$

(b) 假定空气速度为向东(或向西),试证来回飞行的总时间为

$$t_B=\frac{t_0}{1-v_0^2/v'^2}$$

(c) 假定空气的速度为向北(或向南),试证来回飞行的总时间为

$$t_N=\frac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$$

证 (a) 当 $v_0=0$,即空气相对地面是静止的,有 $\boldsymbol{v}_{绝}=\boldsymbol{v}_{相}+\boldsymbol{v}_{牵}$.

式中 $\boldsymbol{v}_{绝}$ 指质点相对静止参考系的绝对速度,$\boldsymbol{v}_{相}$ 指质点相对运动参考系的速度,$\boldsymbol{v}_{牵}$ 指运动参考系相对静止参考系的速度.

可知飞机相对地面参考系速度:$\boldsymbol{v}_{绝}=\boldsymbol{v}'$,即飞机在 AB 间作匀速直线运动.所以飞机来回飞行的总时间 $t_0=\frac{2l}{v'}$.

(b) 假定空气速度向东,则当飞机向东飞行时速度

$$\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_0$$

飞行时间

$$t_1=\frac{l}{v'+v_0}$$

当飞机向西飞行时速度

$$v_2=v_{相}+v_{牵}=v'-v_0$$

飞行时间 $t_2=\frac{l}{v'-v_0}$

故来回飞行时间

$$t=t_1+t_2=\frac{l}{v'+v_0}+\frac{l}{v'-v_0}$$

$$=\frac{2v'l}{v'^2-v_0^2}$$

即 $$t=\frac{\frac{2l}{v'}}{1-\frac{v_0^2}{v'^2}}=\frac{t_0}{1-\frac{v_0^2}{v'^2}}.$$

同理可证，当空气速度向西时，来回飞行时间 $t=\frac{t_0}{1-\frac{v_0^2}{v'^2}}$

(c) 假定空气速度向北．有速度矢量关系如题 1.13.1 图

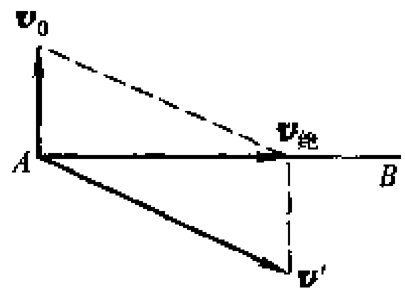
$$v_{绝}=v_0+v'$$

$$v=\sqrt{v'^2-v_0^2}$$

所以来回飞行总时间

$$t=\frac{2l}{\sqrt{v'^2-v_0^2}}$$

$$=\frac{\frac{2l}{v'}}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}=\frac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$$

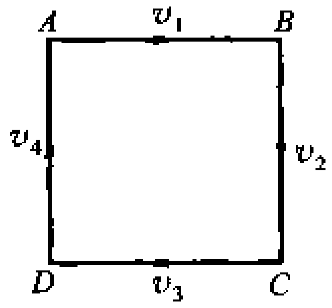


题 1.13.1 图

同理可证空气速度向南时，来回飞行总时间仍为 $t=\frac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$.

1.14 一飞机在静止空气中速率为 100 km/h. 如果飞机沿每边为 6 km 的正方形飞行，且风速为 28 km/h，方向与正方形的某两边平行，则飞机绕此正方形飞行一周，需时多少？

解 正方形如题 1.14.1 图. 由题可知 $v_{牵} = v_{风} = 28$ km/h 设风速 $A \to B$，$v_{相} = 100$ km/h



题 1.14.1 图

当飞机 $A \to B$，$v_1 = (100 + 28)$ km/h = 128 km/h.

$B \to D$，$v_2 = \sqrt{100^2 - 28^2}$ km/h = 96 km/h.

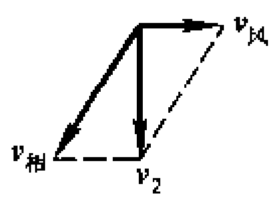
$C \to D$：$v_3 = (100 - 28)$ km/h = 72 km/h.

$D \to A$：$v_4 = \sqrt{100^2 - 28^2}$ km/h = 96 km/h.

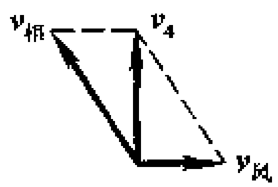
故飞机沿此边长 6 km 正方形飞行一周所需总时间

$$t = \left(\frac{6}{128} + \frac{6}{96} + \frac{6}{72} + \frac{6}{96}\right) \text{h}$$

$$= \frac{49}{192} \text{h} = 15\frac{5}{16} \text{min}$$



题 1.14.2 图



题 1.14.3 图

1.15 当一轮船在雨中航行时，它的雨篷遮着篷的垂直投影后 2 m 的甲板，篷高 4 m. 但当轮船停航时，甲板上干湿两部分的分界线却在篷前 3 m. 如果雨点的速率为 8 m/s，求轮船的速率.

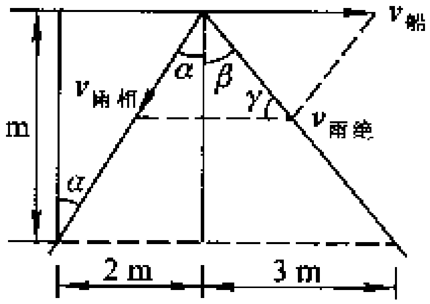
解 船停止时，干湿分界线在篷前 3 m，由题画出速度示意图如题 1.15.1 图.

$$v_{雨绝} = v_{雨相} + v_{船}$$

故 $\dfrac{v_{船}}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{v_{雨绝}}{\sin(\pi-\alpha-\beta-\gamma)}$

又因为 $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$,所以

$$v_{船}=\frac{v_{雨绝}\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$$



题 1.15.1 图

由图可知 $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,

$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\sin\beta=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{4}{5}$$

$$v_{雨绝}=8\ \mathrm{m/s}$$

所以 $v_{船}=\dfrac{v_{雨绝}(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)}{\cos\alpha}$

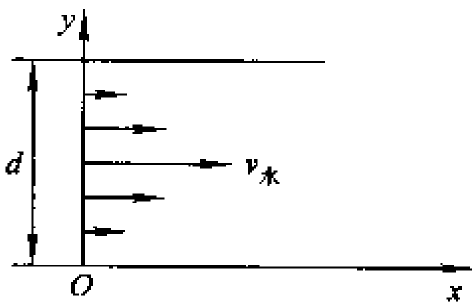
$=8\ \mathrm{m/s}$

1.16 宽度为 d 的河流,其流速与到河岸的距离成正比.在河岸处,水流速度为零,在河流中心处,其值为 c.一小船以相对速度 u 沿垂直于水流的方向行驶,求船的轨迹以及船在对岸靠拢的地点.

解 以一岸边为 x 轴,垂直岸的方向为 y 轴.建立如题 1.16.1 图所示坐标系.

所以水流速度

$$v_{水}=\begin{cases} ky & \left(0\leqslant y\leqslant \dfrac{d}{2}\right) \\ k(d-y) & \left(\dfrac{d}{2}\leqslant y\leqslant d\right)\end{cases}$$



题 1.16.1 图

又因为河流中心处水流速度为 c

$$c=k\times\frac{d}{2}=k\times\left(d-\frac{d}{2}\right)$$

所以 $$k=\frac{2c}{d}$$

当 $0\leqslant y\leqslant\frac{d}{2}$ 时，$v_{水}=\frac{2c}{d}y$，即

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{2c}{d}y & ①\\ y=ut & ②\end{cases}$$

得 $dx=\frac{2cu}{d}t\,dt$，两边积分

$$\int_0^x dx=\int_0^t\frac{2cu}{d}t\,dt$$

$$x=\frac{cu}{d}t^2 \qquad ③$$

联立②③，得

$$x=\frac{c}{ud}y^2\quad\left(0\leqslant y\leqslant\frac{d}{2}\right) \qquad ④$$

同理，当 $d\geqslant y\geqslant\frac{d}{2}$ 时，$v_{水}=\frac{2c}{d}(d-y)$

即

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2c}{d}(d-y)=\frac{2c}{d}(d-ut)$$

$$\int dx=\int\frac{2c}{d}(d-ut)dt$$

$$x=\frac{2c}{u}y-\frac{cy^2}{ud}+D\quad(D\text{ 为一常数}) \qquad ⑤$$

由④知，当 $y=\frac{d}{2}$ 时，$x=\frac{cd}{4u}$ 代入⑤得

$$D=-\frac{cd}{2u}$$

有

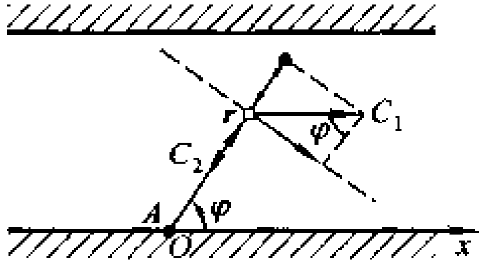
$$x=\frac{2c}{u}y-\frac{c}{ud}y^2-\frac{cd}{2u},\ \frac{d}{2}\leqslant y\leqslant d$$

所以船的轨迹 $\begin{cases}x=\frac{c}{ud}y^2 & \left(0\leqslant y\leqslant\frac{d}{2}\right)\\ x=\frac{2c}{u}y-\frac{c}{ud}y^2-\frac{cd}{2u} & \left(\frac{d}{2}\leqslant y\leqslant d\right)\end{cases}$

船在对岸的靠拢地点，即 $y=d$ 时有 $x=\dfrac{cd}{2u}$.

1.17 小船 M 被水冲走后，由一荡桨人以不变的相对速度 C_2 朝岸上 A 点划回. 假定河流速度 C_1 沿河宽不变，且小船可以看成一个质点，求船的轨迹.

解 以 A 为极点，岸为极轴建立极坐标如题 1.17.1 图. 船沿垂直于 $\boldsymbol{r}$ 的方向的速度为 $C_1\sin\varphi$，船沿径向 $\boldsymbol{r}$ 方向的速度为 C_2 和 C_1 沿径向的分量的合成，即



题 1.17.1 图

$$\begin{cases} r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-C_1\sin\varphi & \text{①} \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=C_1\cos\varphi-C_2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\frac{②}{①}\quad \frac{\mathrm{d}r}{r}=\left(\frac{C_2}{C_1\sin\varphi}-\cot\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

对两边积分：

$$\ln r=\frac{C_2}{C_1}\ln\tan\frac{\varphi}{2}-\ln\sin\varphi+C$$

设 $\dfrac{C_2}{C_1}=k$，$\dfrac{\varphi}{2}=\alpha$，$C$ 为常数

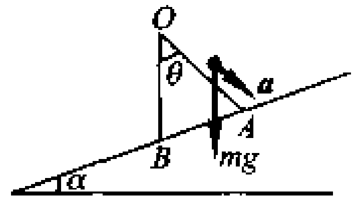
即
$$\ln r=\ln\frac{\sin^{k-1}\alpha}{2\cos^{k+1}\alpha}+C$$

代入初始条件 $r=r_0$ 时，$\varphi=\varphi_0$. 设 $\dfrac{\varphi_0}{2}=\alpha_0$，有 $C=\ln r_0-\ln\dfrac{\sin^{k-1}\alpha_0}{2\cos^{k+1}\alpha_0}$，得

$$r=r_0\frac{\sin^{k-1}\alpha}{\cos^{k+1}\alpha}\cdot\frac{\cos^{k+1}\alpha_0}{\sin^{k-1}\alpha_0}$$

1.18 一质点自倾角为 α 的斜面的上方 O 点，沿一光滑斜槽 OA 下降. 如欲使此质点到达斜面上所需的时间为最短，问斜槽 OA 与竖直线所成之角 θ 应为何值？

解 如题1.18.1图质点沿 OA 下滑，由受力分析我们可知质点下滑的加速度为 $a = g\cos\theta$. 设竖直线 $OB = h$，斜槽 $OA = s$，易知 $\angle OBA = \frac{\pi}{2} - \alpha$，$\angle OAB = \frac{\pi}{2} - \theta + \alpha$，由正弦定理



题1.18.1图

$$\frac{s}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{h}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)}$$

即
$$s = \frac{h\cos\alpha}{\cos(\theta - \alpha)} \quad ①$$

又因为质点沿 OA 光滑面下滑，即质点作匀加速直线运动.

所以
$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g\cos\theta t^2 \quad ②$$

由①②
$$\frac{1}{2}g\cos\theta\cdot\cos(\theta - \alpha)t^2 - h\cos\alpha = 0$$

欲使质点到达 A 点时间最短，由 $t^2 = \frac{2h\cos\alpha}{g\cos\theta\cdot\cos(\theta - \alpha)}$ 可知，只需求出 $\cos\theta\cdot\cos(\theta - \alpha)$的极大值即可.

令

$$y = \cos\theta\cdot\cos(\theta - \alpha) = \cos\theta(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$$

$$y = \cos\alpha\cdot\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin2\theta\sin\alpha$$

把 y 对 θ 求导 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 2\cos\theta\cdot(-\sin\theta)\cdot\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos2\theta\cdot2\cdot\sin\alpha$

极大值时 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = 0$

故有
$$\tan\alpha = \sin2\theta$$

由于都是斜面的夹角，即 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

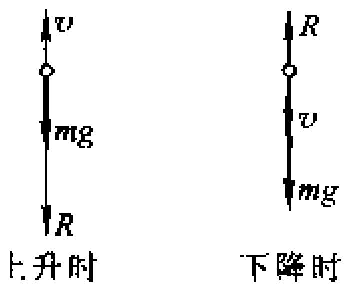
所以
$$\theta = \frac{\alpha}{2}$$

1.19 将质量为 m 的质点竖直抛上于有阻力的媒质中. 设阻力与速度平方成正比，即 $R = mk^2gv^2$. 如上掷时的速度为 v_0，试

证此质点又落至投掷点时的速度为

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 + k^2 v_0^2}}$$

解 质点从抛出到落回抛出点分为上升和下降阶段.取向上为正各力示意图如题 1.19.1 图,则两个过程的运动方程为:



题 1.19.1 图

上升:$m\ddot{y} = -mg - mk^2 g\dot{y}^2$ ①

下降:$-m\ddot{y} = -mg + mk^2 g\dot{y}^2$ ②

对上升阶段:$\dfrac{dv}{dt} = -g(1 + k^2 v^2)$

$$\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{v\,dv}{dy} = -g(1 + k^2 v^2)$$

即
$$\frac{v\,dv}{1 + k^2 v^2} = -g\,dy$$

对两边积分 $\displaystyle\int_{v_0}^{0} \frac{v\,dv}{1 + k^2 v^2} = -\int_0^h g\,dy$

所以
$$h = \frac{1}{2k^2 g}\ln(1 + k^2 v_0^2) \quad ③$$

即质点到达的高度.

对下降阶段:

$$\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = \frac{v\,dv}{dy} = g - k^2 g v^2$$

即
$$\int_0^{v_1} \frac{v\,dv}{-k^2 v^2 + 1} = \int_h^0 g\,dy$$

$$h = -\frac{1}{2k^2 g}\ln(1 - k^2 v_1^2) \quad ④$$

由③=④可得

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{1 + k^2 v_0^2}}$$

1.20 一枪弹以仰角 α、初速 v_0 自倾角为 β 的斜面的下端发射.试证子弹击中斜面的地方和发射点的距离 d(沿斜面量取)及

此距离的最大值分别为

$$d=\frac{2v_0^2}{g}\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}$$

$$d_{\max}=\frac{v_0^2}{2g}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

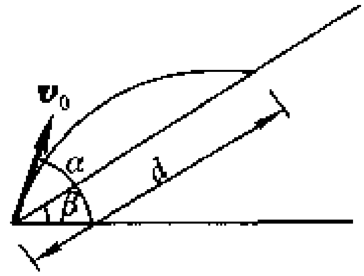
解 作子弹运动示意图如题 1.20.1 图所示.

水平方向不受外力,作匀速直线运动有

$$d\cos\beta=v_0\cos\alpha\cdot t \qquad ①$$

竖直方向作上抛运动,有

$$d\sin\beta=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad ②$$



题 1.20.1 图

由①得 $$t=\frac{d\cos\beta}{v_0\cos\alpha} \qquad ③$$

代入②化简可得

$$d=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}$$

因为子弹的运动轨迹与发射时仰角 α 有关,即 d 是 α 的函数,所以要求 d 的最大值.把 d 对 α 求导,求出极值点.

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{2v_0^2}{g\cos^2\beta}[-\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)]=0$$

即 $$\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)$$

$$\cos(2\alpha-\beta)=0$$

所以 $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}$,代入 d 的表达式中可得:

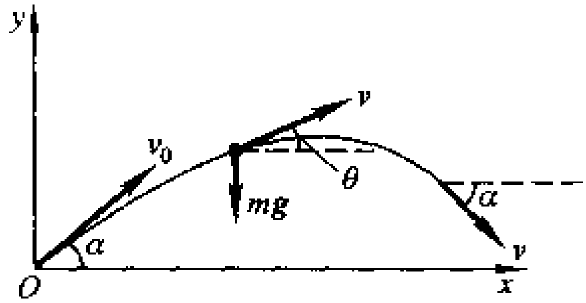
$$d_{\max}=\frac{2v_0^2}{g\cos^2\beta}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

$$=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

此即为子弹击中斜面的地方和发射点的距离 d 的最大值.

1.21 将一质点以初速 v_0 抛出，v_0 与水平线所成之角为 α. 此质点所受到的空气阻力为其速度的 mk 倍，m 为质点的质量，k 为比例常数. 试求当此质点的速度与水平线所成之角又为 α 时所需的时间.



题 1.21.1 图

解 由于阻力一直与速度方向相反，即阻力与速度方向时刻在变化，但都在轨道上每点切线所在的直线方向上，故用自然坐标比用直角坐标好.

轨道的切线方向上有：$m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-mkv-mg\sin\theta$ ①

轨道的法线方向上有：$m\dfrac{v^2}{r}=mg\cos\theta$ ②

由于 θ 角是在减小的，故 $r=-\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ ③

由于初末状态由速度与水平方向夹角 θ 来确定，故我们要想法使①②变成关于 θ 的等式.

由① $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=mv\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$

即 $$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}=-mkv-mg\sin\theta \qquad ④$$

把③代入②可得 $$mv^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=-mg\cos\theta \qquad ⑤$$

用④÷⑤可得 $$\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=\frac{kv+g\sin\theta}{g\cos\theta}$$

$$\frac{1}{v^2}\mathrm{d}v = -\frac{k}{g\cos\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\sin\theta}{v\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$-\frac{\mathrm{d}v}{v^2\cos\theta} = -\frac{k\mathrm{d}\theta}{g\cos^2\theta} + \frac{\sin\theta}{v\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\cos\theta\mathrm{d}v - v\sin\theta\mathrm{d}\theta}{v^2\cos^2\theta} = \frac{k\mathrm{d}\theta}{g\cos^2\theta}$$

即$\frac{\mathrm{d}(v\cos\theta)}{v^2\cos^2\theta} = \frac{k\mathrm{d}\theta}{g\cos^2\theta}$，两边积分可得

$$-\frac{1}{v\cos\theta} = \frac{k}{g}\tan\theta + C \qquad ⑥$$

代入初始条件 $t=0$ 时 $\theta=\alpha$，$v=v_0$，即可得

$$C = -\left(\frac{1}{v_0\cos\alpha} + \frac{k}{g}\tan\alpha\right)$$

代回⑥式，得

$$v = \frac{gv_0\cos\alpha}{\cos\theta[kv_0\cos\alpha(\tan\alpha - \tan\theta) + g]} \qquad ⑦$$

又因为 $v = \omega r$，$m\frac{v^2}{r} = mg\cos\theta$

所以
$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{-\mathrm{d}t} = \frac{g\cos\theta}{v} \qquad ⑧$$

把⑦代入⑧

$$\frac{gv_0\cos\alpha}{\cos\theta[kv_0\cos\alpha(\tan\alpha - \tan\theta) + g]}\mathrm{d}\theta = -g\cos\theta\mathrm{d}t$$

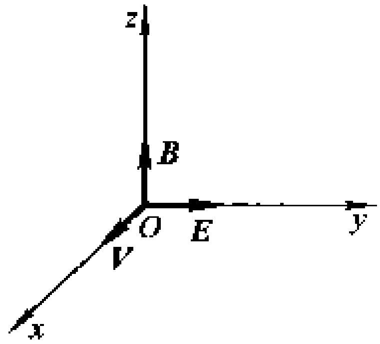
积分后即可得

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{2kv_0\sin\alpha}{g}\right)$$

1.22 如向互相垂直的匀强电磁场 $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$ 中发射一电子，并设电子的初速度 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 垂直．试求电子的运动规律．已知此电子所受的力为 $e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$，式中 $\boldsymbol{E}$ 为电场强度，$\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度，e 为电子所带的电荷，$\boldsymbol{v}$ 为任一瞬时电子运动的速度．

解 各量方向如题 1.22.1 图．电子所受力

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \\ &= eE\boldsymbol{j} + e\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} \\ &= ev_yB\boldsymbol{i} + (eE - ev_xB)\boldsymbol{j} \qquad ①\end{aligned}$$



题 1.22.1 图

则电子的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = ev_yB = eB\dot{y} & ② \\ m\ddot{y} = eE - ev_xB = eE - eB\dot{x} & ③ \\ m\ddot{z} = 0 & ④ \end{cases}$$

由② $m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = eB\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，即 $\int_V^{v_x}\mathrm{d}v_x = \dfrac{eB}{m}\int_0^y \mathrm{d}y$

$$v_x = \frac{eB}{m}y + V \qquad ⑤$$

代入③整理可得

$$\ddot{y} + \frac{e^2B^2}{m^2}y = \frac{e}{m}(E - BV) \qquad ⑥$$

对于齐次方程 $\ddot{y} + \dfrac{e^2B^2}{m^2}y = 0$ 的通解

$$Y_1 = A_1\cos\frac{eB}{m}t + A_2\sin\frac{eB}{m}t$$

非齐次方程⑥的特解 $Y_2 = \dfrac{m}{eB^2}(E - BV)$

所以非齐次方程⑥的通解

$$y = Y_1 + Y_2 = A_1\cos\frac{eB}{m}t + A_2\sin\frac{eB}{m}t + \frac{m}{eB^2}(E - BV)$$

代入初始条件：$t = 0$ 时，$y = 0$ 得 $A_1 = \dfrac{m}{eB}\left(V - \dfrac{E}{B}\right)$

$t = 0$ 时，$v_y = 0$ 得 $A_2 = 0$

故

$$y = \frac{m}{eB}\left(V - \frac{E}{B}\right)\cos\frac{eB}{m}t - \frac{mV}{eB} + \frac{mE}{eB^2} \qquad ⑦$$

同理，把⑦代入⑤可以解出

$$x=\frac{E}{B}t+\frac{m}{eB}\left(V-\frac{E}{B}\right)\sin\frac{eB}{m}t$$

(把⑦代入⑤

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{eB}{m}\left[\frac{m}{eB}\left(V-\frac{E}{B}\right)\cos\frac{eB}{m}t-\frac{mV}{eB}+\frac{mE}{eB^2}\right]+V$$

$$\mathrm{d}x=\left(V-\frac{E}{B}\right)\cos\frac{eB}{m}t\cdot\mathrm{d}t+\frac{E}{B}\mathrm{d}t$$

$$x=\frac{m}{eB}\left(V-\frac{E}{B}\right)\sin\frac{eB}{m}t+\frac{E}{B}t+C$$

代入初条件 $t=0$ 时，$x=0$，得 $C=0$. 所以

$$x=\frac{m}{eB}\left(V-\frac{E}{B}\right)\sin\frac{eB}{m}t+\frac{E}{B}t)$$

1.23 在上题中，如

(a) $\boldsymbol{B}=0$，则电子的轨道为在竖直平面(xy 平面)的抛物线；

(b) 如 $\boldsymbol{E}=0$，则电子的轨道为半径等于 $\frac{mV}{eB}$ 的圆. 试证明之.

证 (a)在 1.22 题中，当 $\boldsymbol{B}=0$ 时，则电子运动受力 $\boldsymbol{F}=eE\boldsymbol{j}$

电子的运动微分方程

$$\begin{cases} m\ddot{x}=0 & ① \\ m\ddot{y}=eE & ② \\ m\ddot{z}=0 & ③ \end{cases}$$

对②积分 $\dot{y}=\frac{eE}{m}t+C_1$ ①

对①再积分 $y=\frac{eE}{2m}t^2+C_1+C_2$

又 $x=Vt, z=0$

故

$$\begin{cases} z=0 \\ y=\frac{eEx^2}{2mV}+C \end{cases}$$

($C=C_1+C_2$ 为一常数)

此即为抛物线方程.

(b)当 $\boldsymbol{E}=0$ 时,

则电子受力 $\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = e \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$

$$= eBv_y \boldsymbol{i} - eBv_x \boldsymbol{j}$$

则电子的运动微分方程为

$$\begin{cases} m\ddot{x} = eBv_y & ① \\ m\ddot{y} = -eBv_x & ② \\ m\ddot{z} = 0 & ③ \end{cases}$$

同 1.22 题的解法，联立①②解之，得

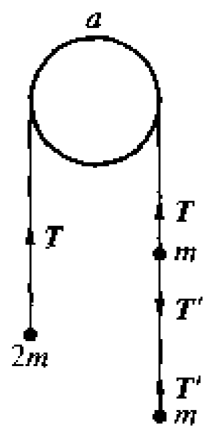
$$\begin{cases} x = \dfrac{m}{eB}V\sin\dfrac{eB}{m}t \\ y = \dfrac{m}{eB}V\cos\dfrac{eB}{m}t \end{cases}$$

于是

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{mV}{eB}\right)^2$$

即电子轨道为半径 $\dfrac{mV}{eB}$ 的圆.

1.24 质量为 m 与 $2m$ 的两质点，为一不可伸长的轻绳所联结，绳挂在一光滑的滑轮上. 在 m 的下端又用固有长度为 a、倔强系数 k 为 $\dfrac{mg}{a}$ 的弹性绳挂上另外一个质量为 m 的质点. 在开始时，全体保持竖直，原来的非弹性绳拉紧，而有弹性的绳则处在固有长度上. 由此静止状态释放后，求证这运动是简谐的，并求出其振动周期 τ 及任何时刻两段绳中的张力 T 及 T'.



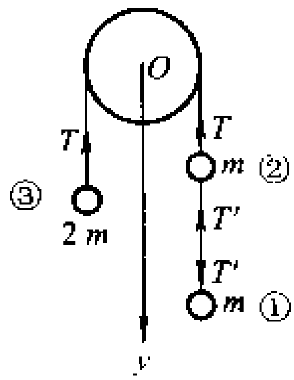
题 1.24.1 图

解 以竖直向下为正方向，建立如题 1.24.2 图所示坐标，以①开始所在位置为原点.

设①②③处物体所处坐标分别为 y_1, y_2, y_3，则 3 个物体运动

微分方程为：

$$\begin{cases} mg - T' = m\ddot{y}_1 & ① \\ T' + mg - T = m\ddot{y}_2 & ② \\ 2mg - T = 2m\ddot{y}_3 & ③ \end{cases}$$



题 1.24.2 图

由于②与③之间是不可伸长轻绳联结，所以有 $y_2 = -y_3$，即

$$\ddot{y}_2 = -\ddot{y}_3 \qquad ④$$

①②间用倔强系数 $k = \dfrac{mg}{a}$ 弹性绳联结.

故有 $T' = k(y_1 - y_2 - a) = \dfrac{mg}{a}(y_1 - y_2 - a)$ ⑤

由①⑤得 $$\ddot{y}_1 = -\frac{g}{a}(y_1 - y_2) + 2g \qquad ⑥$$

由②③①得 $$T' = 3m\ddot{y}_2 + mg \qquad ⑦$$

代入①，有

$$\ddot{y}_1 = -3\ddot{y}_2 \qquad ⑧$$

代入⑥，有

$$\ddot{y}_1 + \frac{4g}{3a}y_1 = g \qquad ⑨$$

此即为简谐振动的运动方程.

角频率 $\omega = 2\sqrt{\dfrac{g}{3a}}$，所以周期 $\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\dfrac{3a}{g}}$.

解⑨得 $$y_1 = A_1\cos\omega t + A_2\sin\omega t + \frac{3a}{4}$$

以初始时③为原点，$t = 0$ 时，$y_1 = 0$，$\dot{y}_1 = 0$.

所以 $$y_1 = -\frac{3}{4}a\cos\omega t + \frac{3}{4}a \qquad ⑩$$

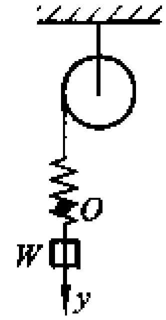
代入①，得

$$T' = mg\left(1 - \cos 2\sqrt{\frac{g}{3a}}t\right)$$

联立③①⑧⑩得 $T = 2mg\left(1 - \dfrac{1}{3}\cos 2\sqrt{\dfrac{g}{3a}}t\right)$

1.25 滑轮上系一不可伸长的绳，绳上悬一弹簧，弹簧另一端挂一重为 W 的物体．当滑轮以匀速转动时，物体以匀速 v_0 下降．如将滑轮突然停住，试求弹簧的最大伸长及最大张力．假定弹簧受 W 的作用时的静伸长为 λ_0．

解 选向下为正方向，滑轮刚停时物体所在平衡位置为坐标原点．建立如题 1.25.1 图所示坐标系．原点的重力势能设为 0．



题 1.25.1 图

设弹簧最大伸长 λ_{max}．整个过程中，只有重力做功，机械能守恒：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{W}{g}v_0^2+\dfrac{1}{2}k\lambda_0^2=-\dfrac{W}{g}\cdot g\cdot(\lambda_{max}-\lambda_0)+\dfrac{1}{2}k\lambda_{max}^2 & ①\\ W=k\lambda_0 & ②\end{cases}$$

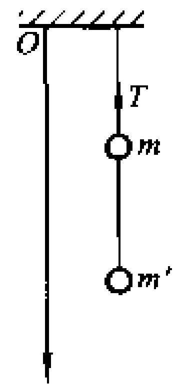
联立①②得 $\lambda_{max}=\lambda_0+v_0\sqrt{\dfrac{\lambda_0}{g}}$

弹簧的最大张力即为弹簧伸长最长时的弹力，T_{max}为最大张力，即

$$T_{max}=k\lambda_{max}=W\left(1+\frac{v_0}{\sqrt{g\lambda_0}}\right)$$

1.26 一弹性绳上端固定，下端悬有 m 及 m' 两质点．设 a 为绳的固有长度，b 为加 m 后的伸长，c 为加 m' 后的伸长．今将 m' 任其脱离而下坠，试证质点 m 在任一瞬时离上端 O 的距离为 $a+b+c\cos\sqrt{\dfrac{g}{b}}t$．

解 以绳顶端为坐标原点．建立如题 1.26.1 图所示坐标系．设绳的弹性系数 k．



题 1.26.1 图

则有

$$mg=kb \qquad ①$$

当 m' 脱离下坠前，m 与 m' 系统平衡．

当 m'脱离下坠后，m 在拉力 T 作用下上升，之后作简谐运动.

运动微分方程为

$$mg - k(y - a) = m\ddot{y} \qquad ②$$

联立①②得

$$\ddot{y} + \frac{g}{b}y = g\frac{a+b}{b} \qquad ③$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{b}y = 0$$

齐次方程通解 $Y_1 = A_1\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t + A_2\sin\sqrt{\frac{g}{b}}t$

非齐次方程③的特解 $Y_0 = a + b$

所以③的通解 $y = A_1\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t + A_2\sin\sqrt{\frac{g}{b}}t + a + b$

代入初始条件：$t = 0$ 时，$y = a + b + c$，得 $A_1 = c, A_2 = 0$

故有

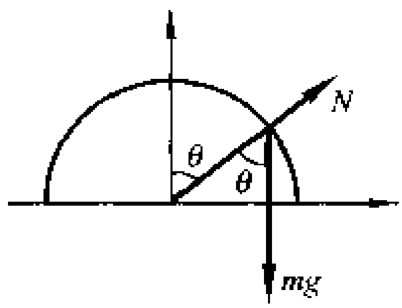
$$y = c\cos\sqrt{\frac{g}{b}}t + a + b$$

即为 m 在任一时刻离上端 O 的距离.

1.27 一质点自一水平放置的光滑固定圆柱面凸面的最高点自由滑下.问滑至何处，此质点将离开圆柱面？假定圆柱体的半径为 r.

解 对于圆柱凸面上运动的质点受力分析如图 1－24.运动轨迹的切线方向上有：

$$mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt} \qquad ①$$



题 1.27.1 图

法线方向上有：$mg\cos\theta - N = m\frac{v^2}{R}$ ②

对于①有：

$$g\sin\theta = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt}$$

（s 为运动路程，亦即半圆柱周围弧长）

即

$$vdv = g\sin\theta ds$$

又因为 $$R\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}s$$

即 $$v\mathrm{d}v = g\sin\theta R\mathrm{d}\theta \quad ③$$

设质点刚离开圆柱面时速度 v_0，离开点与竖直方向夹角 θ_0，对③式两边积分

$$\int_0^{v_0} v\mathrm{d}v = \int_0^{\theta_0} gR\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gR(1-\cos\theta_0) \quad ④$$

刚离开圆柱面时 $N=0$ 即

$$mg\cos\theta_0 = m\frac{v_0^2}{R} \quad ⑤$$

联立④⑤得 $\theta_0 = \arccos\frac{2}{3}$

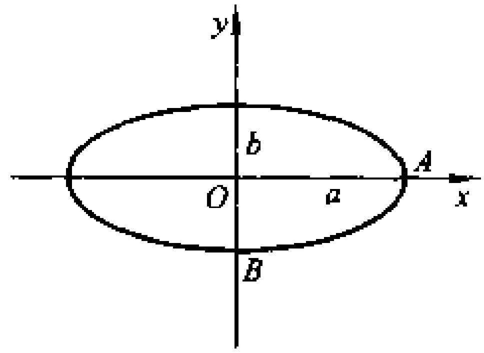
即为质点刚离开圆柱面时与竖直方向的夹角.

1.28 重为 W 的小球不受摩擦面沿半长轴为 a、半短轴为 b 的椭圆弧滑下，此椭圆的短轴是竖直的. 如小球自长轴的端点开始运动时，其初速为零，试求小球在到达椭圆的最低点时它对椭圆的压力.

解 建立如题 1.28.1 图所示直角坐标.

椭圆方程 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ①$$

从 A 滑到最低点 B，只有重力做功. 机械能守恒. 即



题 1.28.1 图

$$mgb = \frac{1}{2}mv^2 \quad ②$$

设小球在最低点受到椭圆轨道对它的支持力为 N 则有：

$$N - mg = m\frac{v^2}{\rho} \quad ③$$

ρ 为 B 点的曲率半径.

$A\to B$ 的轨迹：$y=-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$

得
$$y'=\frac{bx}{a^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}$$

$$y''=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

又因为 $\dfrac{1}{\rho}=k=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{b}{a^2}$$

所以 $N=mg+\dfrac{mv^2}{\rho}=mg+\dfrac{b}{a^2}\times 2mgb$

$$=W\left(1+2\frac{b^2}{a^2}\right)$$

故根据作用力和反作用力的关系，小球到达椭圆最低点对椭圆压力为 $W\left(1+2\dfrac{b^2}{a^2}\right)$，方向垂直轨道向下.

1.29 一质量为 m 的质点自光滑圆滚线的尖端无初速地下滑.试证在任何一点的压力为 $2mg\cos\theta$，式中 θ 为水平线和质点运动方向间的夹角.已知圆滚线方程为

$$x=a(2\theta+\sin2\theta),y=-a(1+\cos2\theta).$$

解 质点作平面曲线运动，运动轨迹方程为

$$\begin{cases}x=a(2\theta+\sin2\theta) & ①\\ y=-a(1+\cos2\theta) & ②\end{cases}$$

由曲线运动质点的受力分析，我们可以得到：

$$\begin{cases}mg\cos\theta-N=m\dfrac{v^2}{\rho} \quad (\text{质点法向受力方程}) & ③\\ mg\sin\theta=m\dfrac{dv}{dt} \quad (\text{质点切向受力方程}) & ④\end{cases}$$

因为曲线上每点的曲率 $k = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ ⑤

所以 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{2a\sin2\theta}{2a + 2a\cos2\theta} = \frac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta} \quad ⑥$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{2\cos2\theta(1+\cos2\theta)+2\sin^2 2\theta}{(1+\cos2\theta)^2}\cdot\frac{1}{2a+2a\cos2\theta}$$

$$= \frac{1}{a(1+\cos2\theta)^2} \quad ⑦$$

把⑥⑦代入曲率公式⑤中

$$k = \frac{1}{4a\cos\theta}$$

所以 $\rho = \frac{1}{k} = 4a\cos\theta$ ⑧

由④ $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = g\sin\theta$$

即 $v\mathrm{d}v = g\sin\theta\mathrm{d}s$，又由数学关系可知

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}s\sin\theta$$

即 $$v\mathrm{d}v = g\mathrm{d}y$$

所以 $$v^2 = 2gy = -2ga(1+\cos2\theta) \quad ⑨$$

把⑧⑨代入①

$$N = mg\cos\theta - m\frac{v^2}{\rho}$$
$$= mg\cos\theta + m\frac{2ga(1+\cos2\theta)}{4a\cos\theta} = 2mg\cos\theta$$

1.30 在上题中，如圆滚线不是光滑的，且质点自圆滚线的尖端自由下滑，达到圆滚线的最低点时停止运动，则摩擦系数 μ 应满足下式

$$\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$$

试证明之.

证　当题 1.29 所述运动轨迹的曲线(圆滚线)不光滑时，质点的运动方程为：

$$\begin{cases} m\dfrac{v^2}{\rho}=mg\cos\theta-N & ① \\ \mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}mv^2\right)=(mg\sin\theta-\mu N)\mathrm{d}s & ② \end{cases}$$

由 1.29 题可知　　$\rho=4a\cos\theta$　　③

由数学知识知　　$\rho\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}s$　　④

把①③④代入②

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}v^2=g(\sin\theta-\mu\cos\theta)4a\cos\theta\mathrm{d}\theta+\mu v^2\mathrm{d}\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}\theta}-2\mu(v^2)=4ag(\sin2\theta-\mu-\mu\cos2\theta) \quad ⑤$$

这是一个非齐次二阶常微分方程.解为

$$v^2=\frac{ag}{1+\mu^2}[-4\mu\sin2\theta+2\cos2\theta(1-\mu^2)]-2ag+Ce^{2\mu\theta}$$

当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$时，$v=0$，得 $C=\dfrac{4ag}{1+\mu^2}e^{-\pi\mu}$，即

$$v^2=\frac{ag}{1+\mu^2}[-4\mu\sin2\theta+2\cos2\theta(1-\mu^2)]+2ag+\frac{4ag}{1+\mu^2}e^{2\mu\theta-\mu\pi}$$

当 $\theta=\pi$，$v=0$ 时，即

$$0=\frac{4ag}{1+\mu^2}e^{-\mu\pi}-2ag\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}-1\right)$$

故有 $\mu^2e^{\mu\pi}=1$

1.31　假定单摆在有阻力的媒质中振动，并假定振幅很小，故阻力与$\dot{\theta}$成正比，且可写为 $R=-2mkl\dot{\theta}$，式中 m 是摆锤的质量，l 为摆长，k 为比例常数.试证当 $k^2<\dfrac{g}{l}$时，单摆的振动周期为

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-k^2l}}$$

证　单摆运动受力分析如题 1.31.1 图所示.

因为 $M = I\beta$ ①

即 $M = -mgl\sin\theta - 2mkl\dot{\theta}\cdot l$

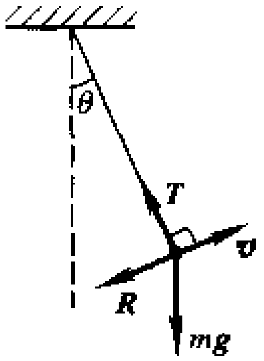
$$I = ml^2$$

$$\beta = \ddot{\theta}$$

所以 $l\ddot{\theta} = -g\sin\theta - 2kl\dot{\theta}$

又单摆摆角 θ 很小，有 $\sin\theta \approx \theta$

上式即化为：$\ddot{\theta} + 2k\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$ ②



题 1.31.1 图

此即为一个标准的有阻尼振动方程.

设 $\omega_0 = \frac{g}{l}$ 为固有频率，又由于 $k^2 < \frac{g}{l}$，即阻力很小的情况．方程②的解为

$$\theta = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

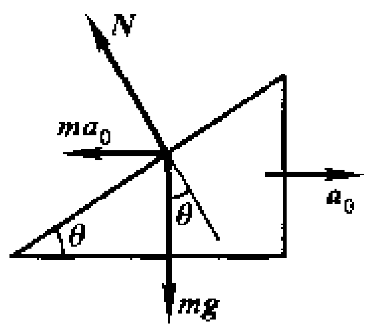
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}, \beta = k$$

所以单摆振动周期 $t = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - k^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - k^2 l}}$

结论得证.

1.32 光滑楔子以匀加速度 a_0 沿水平面运动．质量为 m 的质点沿楔子的光滑斜面滑下．求质点的相对加速度 a' 和质点对楔子的压力 P．

解 设楔子的倾角为 θ，楔子向右作加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 的匀加速运动，如题 1.32.1 图．



题 1.32.1 图

我们以楔子为参考系，在非惯性系中来分析此题，则质点受到一个大小为 $ma_0 = F_{非惯}$ 的非惯性力，方向与 $\boldsymbol{a}_0$ 相反．

质点在楔子这个非惯性系中沿斜面下滑，沿斜面的受力分析：

$$mg\sin\theta + ma_0\cos\theta = ma' \qquad ①$$

垂直斜面受力平衡：

$$mg\cos\theta = ma_0\sin\theta + N \quad ②$$

联立①②得$\begin{cases} a' = g\sin\theta + a_0\cos\theta \\ N = mg\left(\cos\theta - \dfrac{a_0}{g}\sin\theta\right) \end{cases}$

此即楔子相对斜面的加速度 a'.

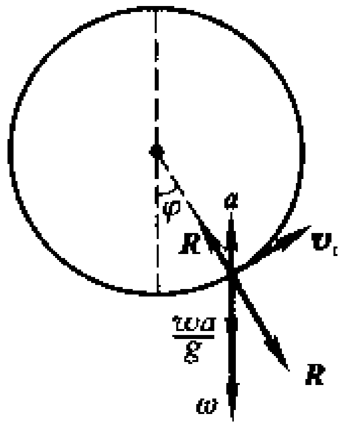
对斜面的压力 P 与斜面对 m 的支持力 N 等大反向. 同理可得到当楔子向左作加速度为 $\boldsymbol{a}_0$ 的匀加速运动时，质点 m 的 a' 和楔子对斜面的压力 P 为

$$\begin{cases} a' = g\sin\theta - a_0\cos\theta \\ P = mg\left(\cos\theta + \dfrac{a_0}{g}\sin\theta\right) \end{cases}$$

综上所述可得$\begin{cases} a' = g\sin\theta \mp a_0\cos\theta \\ P = mg\left(\cos\theta \pm \dfrac{a_0}{g}\sin\theta\right) \end{cases}$

1.33 光滑钢丝圆圈的半径为 r，其平面为竖直的. 圆圈上套一小环，其重为 w. 如钢丝圈以匀加速度 a 沿竖直方向运动，求小环的相对速度 v_r 及圈对小环的反作用力 R.

解 设钢丝圆圈以加速度 $\boldsymbol{a}$ 向上作匀加速运动如题1.33.1图，我们以钢丝圆圈作参考系，在圆圈这个非惯性系里来分析此题.



题 1.33.1 图

圆圈上的小环会受到一个大小为 $\left(\dfrac{w}{g}a\right)$ 方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反的惯性力的作用，则圆环运动到圆圈上某点，切线方向受力分析：

$$\left(\frac{w}{g}a + w\right)\sin\varphi = ma_t = -\frac{w}{g}\frac{dv_r}{dt} \quad ①$$

法线方向受力分析有：

$$\left(\frac{w}{g}a + w\right)\cos\varphi - R = -m\frac{v_r^2}{r} \quad ②$$

对①$\left(\frac{a}{g}+1\right)\sin\varphi=-\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}t}=\quad\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

两边同乘以 rg

$$r(a+g)\sin\varphi=-\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}\varphi}=-v_r\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}\varphi}$$

即
$$r(a+g)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=-v_r\mathrm{d}v_r$$

两边同时积分 $\int_{\varphi_0}^{\varphi}r(a+g)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_{v_{r0}}^{v_r}v_r\mathrm{d}v_r$

$$v_r=\sqrt{v_{r0}^2+2(a+g)(\cos\varphi-\cos\varphi_0)r} \qquad ③$$

把③代入②可解得

$$R=\frac{\omega}{r}\left[\left(1+\frac{a}{g}\right)(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)r+\frac{v_{r0}^2}{g}\right]$$

同理可解出，当钢丝圆圈以加速度 $\boldsymbol{a}$ 竖直向下运动时小环的相对速度 $v_r=\sqrt{v_{r0}^2+2(g-a)(\cos\varphi-\cos\varphi_0)r}$

$$R=\frac{\omega}{r}\left[\left(1-\frac{a}{g}\right)(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)r+\frac{v_{r0}^2}{g}\right]$$

综上所述，小环的相对速度 v_r

$$v_r=\sqrt{v_{r0}^2+2(g\mp a)(\cos\varphi-\cos\varphi_0)r}$$

圈对小环的反作用力

$$R=\frac{\omega}{r}\left[\left(1\mp\frac{a}{g}\right)(3\cos\varphi-2\cos\varphi_0)r+\frac{v_{r0}^2}{g}\right]$$

1.34 火车质量为 m，其功率为常数 k. 如果车所受的阻力 f 为常数，则时间与速度的关系为

$$t=\frac{mk}{f^2}\ln\frac{k-v_0f}{k-vf}-\frac{m(v-v_0)}{f}$$

如果 f 和速度 v 成正比，则

$$t=\frac{mv}{2f}\ln\frac{vk-fv_0^2}{v(k-vf)}$$

式中 v_0 为初速度，试证明之.

证 (1) 当火车所受阻力 f 为常数时，因为功率 P 与牵引力有如下关系：$P = F_{牵}v$

所以
$$k = (F_{合} + f)v$$

即
$$k = \left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + f\right)v$$

$$\frac{mv\mathrm{d}v}{k - fv} = \mathrm{d}t$$

对两边积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{v\mathrm{d}v}{k - fv} = \int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

$$t = \frac{mk}{f^2}\ln\frac{k - v_0 f}{k - vf} - \frac{m(v - v_0)}{f}$$

(2) 当阻力 f 和速度 v 成正比时，设 $f = lv$，l 为常数. 同理由(1)可知

$$k = \left(m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + f\right)v$$

即
$$k = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + lv^2$$

$$\frac{v\mathrm{d}v}{k - lv^2} = \frac{\mathrm{d}t}{m}$$

对两边积分
$$\int_{v_0}^{v}\frac{v\mathrm{d}v}{k - lv^2} = \int_0^t\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

$$t = \frac{m}{2l}\ln\frac{k - lv_0^2}{k - lv^2}$$

$$= \frac{mv}{2f}\ln\frac{vk - fv_0^2}{v(k - vf)}$$

1.35 质量为 m 的物体为一锤所击. 设锤所加的压力，是均匀地增减的. 当在冲击时间 τ 的一半时，增至极大值 P，以后又均匀减小至零. 求物体在各时刻的速率以及压力所做的总功.

解 锤的压力是均匀增加的，设 $F = kt$，k 为常数，由题意可知 $\int_0^P \mathrm{d}F = k\int_0^{\frac{\tau}{2}}\mathrm{d}t$，得 $P = \frac{k}{2}\tau$，所以 $k = \frac{2P}{\tau}$，

即 $$F=\frac{2P}{\tau}t$$

故 $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{2P}{\tau}t$$

$$m\mathrm{d}v=\frac{2P}{\tau}t\mathrm{d}t$$

两边同时积分 $$m\int_0^v\mathrm{d}v=\frac{2P}{\tau}\int_0^t t\mathrm{d}t$$

得 $$v=\frac{P}{m\tau}t^2\quad\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\tau}{2}\right)\qquad ①$$

又因为当 F 增至极大值 P 后，又均匀减小至 0，故有此时有 $F=k'(t-\tau)$，k' 为常数，

$$\int_P^0\mathrm{d}F=k'\int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\mathrm{d}t$$

$$k'=-\frac{2P}{\tau}$$

所以 $$F=-\frac{2P}{\tau}(t-\tau)$$

即 $$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{2P}{\tau}(\tau-t)$$

$$m\int_{v_{\frac{\tau}{2}}}^{v}\mathrm{d}v=\frac{2P}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{t}(\tau-t)\mathrm{d}t$$

$$mv-mv_{\frac{\tau}{2}}=-\frac{2P}{\tau}\left[\frac{1}{2}(\tau-t)^2-\frac{1}{2}\left(\tau-\frac{\tau}{2}\right)^2\right]\qquad ②$$

由①得 $$mv_{\frac{\tau}{2}}=\frac{P\tau}{4}\qquad ③$$

$$v=\frac{P}{2m\tau}(-\tau^2+4t\tau-2t^2)$$

整个过程压力所做功 W

又因为 $$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=Fv$$

即 $$\mathrm{d}W=Fv\mathrm{d}t$$

对上式两边分段积分

$$\int_0^W \mathrm{d}W = \int_0^{\frac{\tau}{2}} \frac{2P}{\tau}t \cdot \frac{P}{m\tau}t^2 \mathrm{d}t + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \frac{2P}{\tau}(\tau - t) \cdot \frac{P}{2m\tau}(-\tau^2 + 4\tau t - 2t^2)\mathrm{d}t$$

得

$$W = \frac{P^2\tau^2}{8m}$$

1.36 检验下列的力是否是保守力.如是,则求出其势能.

(a) $F_x = 6abz^3y - 20bx^3y^2, F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y, F_z = 18abxyz^2$

(b) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}F_x(x) + \boldsymbol{j}F_y(y) + \boldsymbol{k}F_z(z)$

解 (a) 保守力 $\boldsymbol{F}$ 满足条件$\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$

对题中所给的力的表达式,代入上式

$$\text{即}\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= (18abxz^2 - 18abxz^2)\boldsymbol{i} + (18abz^2y - 18abz^2y)\boldsymbol{j} + (6abz^3 - 40bx^3y - 6abz^3 + 40abx^3y)\boldsymbol{k}$$

$$= 0$$

所以此力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力,其势能则为

$$V = -\int \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$= -\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z)$$

$$= \int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} (6abz^3y - 20bx^3y^2)\mathrm{d}x - \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} (6abxz^3 - 10bx^4y)\mathrm{d}y - \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} (18abxyz^2)\mathrm{d}z$$

$$=5bx^4y^2-6abxyz^3$$

(b) 同(a)，

$$由\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=0$$

所以此力 $\boldsymbol{F}$ 是保守力，则其势能为

$$V=-\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=-\int_{x_A}^{x_B}F_x\mathrm{d}x-\int_{y_A}^{y_B}F_y\mathrm{d}y-\int_{z_A}^{z_B}F_z\mathrm{d}z$$

1.37 根据汤川核力理论，中子与质子之间的引力具有如下形式的势能：

$$V(r)=\frac{k\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r},k<0$$

试求

(a) 中子与质子间的引力表达式，并与平方反比定律相比较；

(b) 求质量为 m 的粒子作半径为 a 的圆运动的动量矩 J 及能量 E.

解 (a) 因为质子与中子之间引力势能表达式为

$$V(r)=\frac{k\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}(k<0)$$

故质子与中子之间的引力 $F(r)$

$$F(r)=-\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{k\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}\right)$$

$$=\frac{k\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r^2}+\frac{\alpha k\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r}$$

$$=\frac{k(1+\alpha r)\mathrm{e}^{-\alpha r}}{r^2}$$

(b) 质量为 m 的粒子作半径为 a 的圆运动.

动量矩 $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$

由(a)知 $F_{(r)} = \dfrac{k(1+\alpha r)e^{-\alpha r}}{r^2}$

$F_{(r)}$ 提供粒子作圆周运动的向心力,$F_{(r)}$ 方向是沿着径向,

故
$$-\frac{k(1+\alpha r)e^{-\alpha r}}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

当半径为 a 的圆周运动
$$-\frac{k(1+\alpha a)e^{-\alpha a}}{a^2} = m\frac{v^2}{a}$$

等式两边同乘以 ma^3

即
$$-mka(1+\alpha a)e^{-\alpha a} = m^2v^2a^2$$

又因为
$$J = mva$$

有
$$J^2 = -mka(1+\alpha a)e^{-\alpha a}$$

做圆周运动的粒子的能量等于粒子的动能和势能之和.

所以 $E = T + V$

$$= \frac{1}{2}mv^2 + V_{(a)}$$

$$= -\frac{k(1+\alpha a)e^{-\alpha a}}{2a} + \frac{ke^{-\alpha a}}{a} = \frac{k(1-\alpha a)e^{-\alpha a}}{2a}$$

1.38 已知作用在质点上的力为

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$F_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

式中系数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 都是常数.问这些 a_{ij} 应满足什么条件,才有势能存在?如这些条件满足,试计算其势能.

解 要满足势能的存在,即力场必须是无旋场,亦即力为保守力,所以 $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$

即$\begin{cases}\dfrac{\partial F_z}{\partial_y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial_z} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial_y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial_x} \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial_z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial_x}\end{cases}$　　得$\begin{cases}a_{32} = a_{23} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31}\end{cases}$

$a_{ij}(i,j = 1,2,3)$为常数满足上式关系，才有势能存在.

势能为：$V = -\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\left(\int F_x\mathrm{d}x + \int F_y\mathrm{d}y + \int F_z\mathrm{d}z\right)$

$$= -\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)}(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z)\mathrm{d}x -$$

$$\int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)}(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)\mathrm{d}y -$$

$$\int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)}(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)\mathrm{d}z -$$

$$= \frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{31}z^2 + 2a_{12}xy +$$

$$2a_{23}yz + 2a_{31}zx)$$

1.39　一质点受一与距离$\frac{3}{2}$次方成反比的引力作用在一直线上运动. 试证此质点自无穷远到达a时的速率和自a静止出发到达$\frac{a}{4}$时的速率相同.

证　质点受一与距离$\frac{3}{2}$次方成反比的力作用.

设此力为　　$F_{(r)} = kr^{-\frac{3}{2}}$($k$为一常数)　　①

又因为 $F_{(r)} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$

即　　$F_{(r)}\mathrm{d}r = mv\mathrm{d}v$

$$kr^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}r = mv\mathrm{d}v \qquad ②$$

当质点从无穷远处到达a时，对②式左右两边分别积分：

$$\int_{+\infty}^{a} kr^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}r = m\int_{0}^{v} v\mathrm{d}v$$

$$v^2 = -\frac{4k}{m}a^{-\frac{1}{2}}$$

当质点从 a 静止出发到达$\frac{a}{4}$时,对 ② 式左右两边分别积分:

$$\int_{a}^{\frac{a}{4}} kr^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}r = m\int_{0}^{v} v\mathrm{d}v$$

得
$$v^2 = -\frac{4k}{m}a^{-\frac{1}{2}}$$

所以质点自无穷远到达 a 时的速率和自 a 静止出发到达$\frac{a}{4}$时的速率相同.

1.40 一质点受一与距离成反比的引力作用在一直线上运动,质点的质量为 m,比例系数为 k.如此质点从距原点 O 为 a 的地方由静止开始运动,求其达到 O 点所需的时间.

解 由题可知 $F_{(r)} = -\frac{k}{r}$(因为是引力,方向与 r 径向相反所以要有负号)

由运动微分方程
$$-\frac{k}{r} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即
$$-\frac{k}{r} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$-\frac{k}{r}\mathrm{d}r = mv\mathrm{d}v \qquad ①$$

对上式两边积分 $-\int_{a}^{r}\frac{k}{r}\mathrm{d}r = \int_{0}^{v} mv\mathrm{d}v$

$$-k\ln\frac{r}{a} = \frac{1}{2}mv^2$$

故 $v = \pm\sqrt{\frac{2k}{m}\ln\frac{a}{r}}$

又因为 r 与 v 的方向相反,故取负号.

即 $v = -\sqrt{\frac{2k}{m}\ln\frac{a}{r}} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$

对上式积分

$$\int_a^0 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\frac{2k}{m}\ln\frac{a}{r}}} = -\int_0^t \mathrm{d}t$$

令 $\frac{a}{r} = \frac{1}{\xi}$, $\mathrm{d}r = a\mathrm{d}\xi$. 变量代换可得

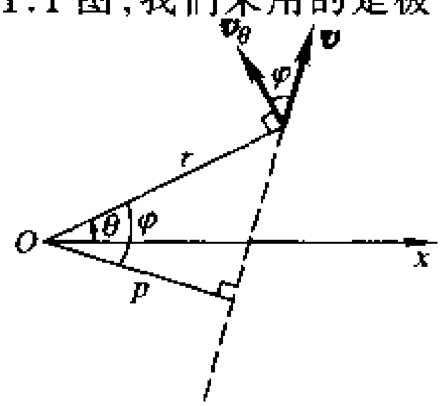
$$t = -\int_a^0 \frac{a\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\frac{2k}{m}\ln\frac{1}{\xi}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{2k}{m}}}\sqrt{\pi} = a\sqrt{\frac{m\pi}{2k}}$$

1.41 试导出下面有心力量值的公式:

$$F = \frac{mh^2}{2}\frac{\mathrm{d}p^{-2}}{\mathrm{d}r}$$

式中 m 为质点的质量, r 为质点到力心的距离, $h = r^2\dot{\theta} =$ 常数, p 为力心到轨道切线的垂直距离.

证 画出有心力场中图示如题 1.41.1 图,我们采用的是极坐标. 所以 $v_\theta = r\dot{\theta} = v\cos\varphi$



题 1.41.1 图

又由于 $h = r^2\dot{\theta} =$ 常数,即

$h = r \cdot r\dot{\theta} = rv\cos\varphi$

由图所示关系,又有 $p = r\cos\varphi$

故 $h = pv$ 即 $v = \frac{h}{p}$

由动能定理 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

$\boldsymbol{F}$ 沿 $\boldsymbol{r}$ 方向 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\mathrm{d}r$

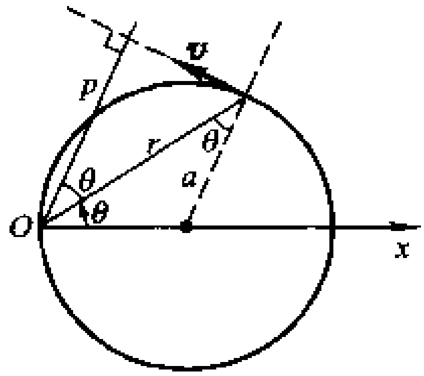
得
$$F = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2}mh^2\frac{\mathrm{d}p^{-2}}{\mathrm{d}r}$$

1.42 试利用上题的结果,证明:

(a) 如质点走一圆周,同时力心位于此圆上,则力与距离五次方成反比.

(b) 如质点走一对数螺旋,而其极点即力心,则力与距离立方成反比.

证 (a) 依据上题结论，我们仍取用极坐标如题 1.42.1 图．质点运动轨迹为一圆周，则其极坐标方程为



题 1.42.1 图

$$r = 2a\cos\theta \qquad ①$$

$$p = r\cos\theta \qquad ②$$

由 ①② 得 $\quad r^2 = 2ap$

即
$$p = \frac{r^2}{2a} \qquad ③$$

故 $F = \dfrac{1}{2}mh^2\dfrac{\mathrm{d}p^{-2}}{\mathrm{d}r} = \dfrac{1}{2}mh^2\dfrac{\mathrm{d}\left(\dfrac{4a^2}{r^4}\right)}{\mathrm{d}r}$

$$= -\frac{8a^2mh^2}{r^5}$$

即力与距离 5 次方成反比，负号表示力的方向与径向相反．

(b) 质点走一对数螺旋线，极点为力心，我们仍采用极坐标．

对数螺旋线 $\quad r = \mathrm{e}^{a\theta}$，$a$ 为常数．有

$$\dot{r} = ar\dot{\theta}$$

根据题 1.41，$h = r^2\dot{\theta} =$ 常数，有

$$F = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\mathrm{d}r}$$

$$= \frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(a^2+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\dot{\theta}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m(a^2+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{h^2}{r^2}\right)$$

$$= -mh^2(a^2+1)r^{-3}$$

故得证．

1.43 如质点受有心力作用而作双纽线 $r^2 = a^2\cos2\theta$ 的运动时，则

$$F = -\frac{3ma^4h^2}{r^7}$$

试证明之.

证 由比耐公式

$$-\frac{F}{m} = h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

质点受有心力作双纽线 $r^2 = a^2\cos2\theta$ 运动

故
$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a\sqrt{\cos2\theta}}$$

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{a} \cdot \sin2\theta \cdot \frac{1}{(\cos2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{1}{a}\left[\frac{2\cos2\theta}{(\cos2\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2}\sin2\theta \cdot (\cos2\theta)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2\sin2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{a}[2(\cos2\theta)^{-\frac{1}{2}} + 3\sin^22\theta(\cos2\theta)^{-\frac{5}{2}}]$$

故
$$F = mh^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)$$

$$= -mh^2\frac{1}{a^3\cos2\theta}\left[2(\cos2\theta)^{\frac{1}{2}} + 3\sin^2 2\theta(\cos2\theta)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{\sqrt{\cos2\theta}}\right]$$

$$= -\frac{3mh^2}{a^3}(\cos2\theta)^{-\frac{3}{2}}(1 + \tan^22\theta)$$

$$= -\frac{3mh^2}{a^3}(\cos2\theta)^{-\frac{7}{2}}$$

$$= -\frac{3mh^2}{a^3\left(\frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$= -\frac{3ma^4h^2}{r^7}$$

1.44 质点所受的有心力如果为

$$F = -m\left(\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{\nu}{r^3}\right)$$

式中 μ 及 ν 都是常数,并且 $\nu < h^2$,则其轨道方程可写成

$$r = \frac{a}{1 + e\cos k\theta}$$

试证明之. 式中 $k^2 = \frac{h^2 - \nu}{h^2}$, $a = \frac{k^2 h^2}{\mu^2}$, $e = \frac{Ak^2 h^2}{\mu^2}$($A$ 为积分常数).

证 由比耐公式

$$-\frac{F}{m} = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

将力 $F = -m\left(\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{\nu}{r^3}\right)$代入此式

$$\frac{\mu^2}{r^2} + \frac{\nu}{r^3} = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

因为 $u = \frac{1}{r}$

所以 $$\mu^2 u^2 + \nu u^3 = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right)$$

即 $$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{\nu}{h^2}\right) u = \frac{\mu^2}{h^2}$$

令 $k^2 = \frac{h^2 - \nu}{h^2}$

上式化为

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + k^2 u = \frac{\mu^2}{h^2}$$

这是一个二阶常系数非齐次方程.

解之得 $u = A\cos(k\theta + \varphi) + \frac{\mu^2}{k^2 h^2}$

A 为积分常数,取 $\varphi = 0$,故

$$u = A\cos k\theta + \frac{\mu^2}{k^2 h^2}$$

有 $r = \frac{1}{u} = \frac{1}{A\cos k\theta + \frac{\mu^2}{k^2 h^2}} = \frac{\frac{k^2 h^2}{\mu^2}}{A\frac{k^2 h^2}{\mu^2}\cos k\theta + 1}$

令 $a = \dfrac{k^2h^2}{\mu^2}$，　$e = \dfrac{Ak^2h^2}{\mu^2}$

所以 $r = \dfrac{a}{1 + e\cos k\theta}$

1.45　如 $\dot{s}_a$ 及 $\dot{s}_p$ 为质点在远日点及近日点处的速率，试证明

$$\dot{s}_p : \dot{s}_a = (1 + e) : (1 - e)$$

证　由题意可知，质点是以太阳为力心的圆锥曲线，太阳在焦点上.

轨迹方程为：
$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

在近日点处　$\theta = 0°$，　$r_a = \dfrac{p}{1 + e}$

在远日点处　$\theta = 180°$，　$r_p = \dfrac{p}{1 - e}$，由角动量守恒有

所以　$\dot{s}_p : \dot{s}_a = r_p : r_a = (1 + e) : (1 - e)$

1.46　质点在有心力作用下运动.此力的量值为质点到力心距离 r 的函数，而质点的速率则与此距离成反比，即 $v = \dfrac{a}{r}$.如果 $a^2 > h^2 (h = r^2\dot{\theta})$，求点的轨道方程.设当 $r = r_0$ 时，$\theta = 0$.

解　因为质点速率 $v = \dfrac{a}{r}$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

所以
$$\frac{a^2}{r^2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

又由于 $h = r^2\dot{\theta}$

即
$$\frac{a^2}{r^2} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{r^4\dot{\theta}^2}{r^2}$$

$$\frac{a^2}{r^2} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{h}{r^2}\right)^2 = \frac{a^2 - h^2}{r^2}$$

又因为 $a^2 > h^2$

所以$\frac{dr}{r}=\pm\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}d\theta$

两边积分

$$\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r}=\pm\int_0^{\theta}\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}d\theta$$

即 $\ln\frac{r}{r_0}=\pm\frac{\sqrt{a^2-h^2}}{h}\theta$

1.47 (a) 某彗星的轨道为抛物线，其近日点距离为地球轨道(假定为圆形)半径的$\frac{1}{n}$. 则此彗星运行时，在地球轨道内停留的时间为一年的

$$\frac{2}{3\pi}\cdot\frac{n+2}{n}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

倍，试证明之.

(b) 试再证任何作抛物线轨道的彗星停留在地球轨道(仍假定为圆形)内的最长时间为一年的$\frac{2}{3\pi}$倍，或约为 76 日.

证 (a) 设地球轨道半径为 R. 则彗星的近日点距离为$\frac{R}{n}$.

圆锥曲线的极坐标方程为 $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$

彗星轨道为抛物线，即 $e=1$. 近日点时 $\theta=0$.

故近日点有 $r=\frac{p}{1+e}=\frac{p}{2}$

即 $\frac{R}{n}=\frac{p}{2}$, $p=\frac{2R}{n}$ ①

又因为 $p=\frac{h^2}{k^2}$, $h=r^2\dot{\theta}$

所以 $$h=k\sqrt{\frac{2R}{n}}$$ ②

(彗星单位时间内矢径扫过的面积 h)

扫过扇形面积的速度 $v=\frac{h}{2}=\frac{k}{2}\sqrt{\frac{2R}{n}}$ ③

又因为 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \dfrac{1}{2}r^2\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

故 $\mathrm{d}s = \dfrac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta$

两边积分

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{-\theta}^{\theta} r^2\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{-\theta}^{\theta}\frac{4R^2}{h^2(1+\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{4R^2}{h^2}\left[\frac{\tan\dfrac{\theta}{2}}{3(1+\cos\theta)} + \frac{1}{3}\tan\frac{\theta}{2}\right] \quad ④$$

从数学上我们可以得到两轨道交点为地球轨道半径处.

即 $R = \dfrac{p}{1+\cos\theta} = \dfrac{2R/n}{1+\cos\theta}$

即
$$\cos\theta = \frac{2-n}{n} \quad ⑤$$

又因为
$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$$

所以
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \pm\sqrt{n-1} \quad ⑥$$

把⑤⑥代入④(⑥式代入时取“+”即可)

$$s = \frac{4R^2}{h^2}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{3\dfrac{2}{n}} + \frac{1}{3}\sqrt{n-1}\right) = \frac{2R^2}{3h^2}\sqrt{n-1}(n+2)$$

故彗星在地球轨道内停留的时间为

$$t_1 = \frac{s}{v} = \frac{\dfrac{2R^2}{3h^2}(n+2)\sqrt{n-1}}{\dfrac{k}{2}\sqrt{\dfrac{2R}{n}}}$$

$$= \frac{4R^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\frac{n+2}{3n}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2n}} \quad ⑦$$

设地球绕太阳运动一周时间为 t_2.

因为假定地球运动轨道为圆形，所以

$$r = R = \frac{p}{1 + e\cos\theta} = p$$

又由于 $p = \frac{h^2}{k^2}$，有 $h = kR^{\frac{1}{2}}$

地球绕太阳运动单位时间内矢径扫过面积 h.

扫过扇形速度 $v = \frac{h}{2} = \frac{kR^{\frac{1}{2}}}{2}$

$$t_2 = \frac{s'}{v} = \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}kR^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{k}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{4R^{\frac{3}{2}}}{k}\cdot\frac{(n+2)}{3n}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}{\frac{2\pi R^{\frac{3}{2}}}{k}}$$

$$= \frac{2}{3\pi}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2n}} \qquad ⑧$$

(b) 由证明(a)知

彗星在地球轨道内停留时间 t_1

$$t_1 = \frac{4R^{3/2}}{k}\cdot\frac{(n+2)}{3n}\cdot\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$$

对此式求极大值，即对 n 求导，使 $\frac{dt_1}{dn} = 0$

即 $$\frac{dt_1}{dn} = \frac{4R^{3/2}}{k}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}n^{-2}\left(1+\frac{2}{n}\right) - 2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\,n^{-2}\right] = 0$$

即 $\frac{3}{n} = \frac{3}{2}$，得 $n = 2$

验证 $$\frac{d^2t_1}{dn^2} = \left[-\frac{3}{n^2\sqrt{n-1}} - \left(\frac{3}{n}-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{2\sqrt{(n-1)^3}}\right]\Bigg|_{n=2} < 0$$

故　$n=2$ 为极大值. 代入⑧式可知

$$\left.\frac{t_1}{t_2}\right|_{\max}=\frac{2}{3\pi}\text{ 年}$$

1.48　试根据§1.9中所给出的我国第一颗人造地球卫星的数据,求此卫星在近地点和远地点的速率 v_1 及 v_2 以及它绕地球运行的周期 τ(参看79页).

解　由§1.9给出的条件:

人造地球卫星近、远地点距离 r_1、r_2 分别为

$$r_1=439\ \text{km},r_2=2\ 384\ \text{km}.$$

地球半径 $R\approx 6\ 400\ \text{km}$.

由椭圆运动中的能量方程可知:

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_1+R}=-\frac{GMm}{2a} \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2+R}=-\frac{GMm}{2a} \qquad ②$$

$2a$ 为卫星运行的椭圆轨道的长轴

$$\begin{aligned}2a&=r_1+r_2+2R\\&=15\ 623\ \text{km}\end{aligned}$$

把 $2a$ 代入①②有

近地点速率 $v_1\approx 8.15\times 10^3\ \text{m/s}$

远地点速率 $v_2\approx 6.34\times 10^3\ \text{m/s}$

运动周期　$T=\dfrac{2\pi a^{3/2}}{k}$　(参见1.47)

其中 a 为运动轨道的半长轴　$k=\sqrt{GM}$

所以　$T=\dfrac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}\approx 114\ \text{min}$

1.49　在行星绕太阳的椭圆运动中,如令 $a-r=ae\cos E$,$\int\frac{2\pi}{\tau}\mathrm{d}t=T$,式中 τ 为周期,a 为半长轴,e 为偏心率,E 为一个新的参量,在天文学上叫做**偏近点角**. 试由能量方程推出下面的**开普**

勒方程：

$$T = E - e\sin E$$

证 由行星绕太阳作椭圆运动的能量方程为

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2a}$$

a 为椭圆的半长轴.

令 $k^2 = GM$. 又因为 $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$,上式化为:

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k^2 m}{r} = -\frac{mk^2}{2a}$$

因为 $h = r^2\dot{\theta}$

即 $\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} = \frac{2k^2}{r} - \frac{k^2}{a}$

所以 $r^2\dot{r}^2 = 2rk^2 - h^2 - \frac{k^2 r^2}{a}$ ①

又因为行星椭圆轨道运动周期

$$\tau = \frac{2\pi a^{3/2}}{k}$$

即 $\frac{k}{a^{3/2}} = \frac{2\pi}{\tau} =$ 常数 C,故 $C^2 = \frac{k^2}{a^3}$

又因为 $p = a(1 - e^2)$

$$p = \frac{h^2}{k^2}, p \text{ 为正焦弦的一半}$$

所以 $h^2 = k^2 a(1 - e^2) = C^2 a^4(1 - e^2)$ ②

由题意可知

$$a - r = ae\cos E$$

即 $$\frac{dr}{dt} = ae\sin E\frac{dE}{dt}$$ ③

把②③代入①可得

$$\frac{a^2 e^2\sin^2 E}{C^2 a^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 r^2 = a^2 e^2\sin^2 E$$

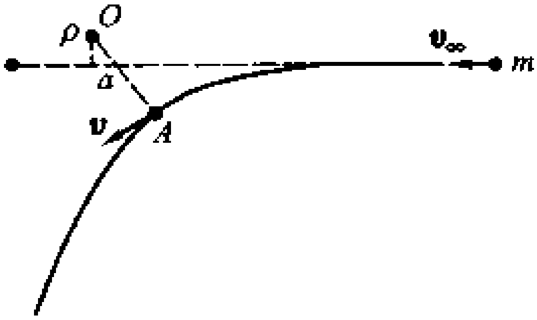
化简可得:$\frac{r}{aC}\cdot\frac{dE}{dt} = 1, r\,dE = a\,dt$

即 $(1-e\cos E)\mathrm{d}E=\frac{2\pi}{\tau}\mathrm{d}t$

两边积分,由题设 $\int\frac{2\pi}{\tau}\mathrm{d}t = T$

即 $T=\int_0^E(1-e\cos E)\mathrm{d}E = E-e\sin E$

1.50 质量为 m 的质点在有心斥力场$\frac{mc}{r^3}$中运动,式中 r 为质点到力心 O 的距离,c 为常数.当质点离 O 很远时,质点的速度为 v_∞,而其渐近线与 O 的垂直距离则为 ρ(即瞄准距离).试求质点与 O 的最近距离 a.



题 1.50.1 图

解 质点在有心力场中运动,能量和角动量均守恒.无穷远处势能为 0.

所以 $\frac{1}{2}mv_\infty^2=\frac{1}{2}mv^2+V_{(a)}$ ①

$mv_\infty\rho=mva$ ②

任意一处 $V_{(a)}=-\int F(r)\mathrm{d}r=-\int_\infty^a\frac{mc}{r^3}\mathrm{d}r=\frac{mc}{2a^2}$

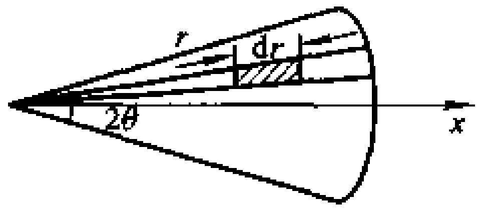
由② $v=\frac{v_\infty\rho}{a}$代入①

$$v_\infty^2=\frac{v_\infty^2\rho^2}{a^2}+\frac{c}{a^2}$$

所以 $a=\left(\rho^2+\frac{c}{v_\infty^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

第二章　质点组力学

2.1　求均匀扇形薄片的质心，此扇形的半径为 a，所对的圆心角为 2θ. 并证半圆片的质心离圆心的距离为 $\frac{4}{3}\frac{a}{\pi}$.



题 2.1.1 图

解　均匀扇形薄片，取对称轴为 x 轴，由对称性可知质心一定在 x 轴上.

由质心公式

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

设均匀扇形薄片密度为 ρ，任意取一小面元 $\mathrm{d}S$，

则

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}S=\rho r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$$

又因为

$$x=r\cos\theta$$

所以

$$x_c=\frac{\int x\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\iint x\rho r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}{\iint \rho r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r}=\frac{\rho\int_{-\theta}^{\theta}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\mathrm{d}r}{\rho\int_{-\theta}^{\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2}{3}a\,\frac{\sin\theta}{\theta}$$

对于半圆片的质心，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 代入，有

$$x_c=\frac{2}{3}a\,\frac{\sin\theta}{\theta}=\frac{2}{3}a\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}\,\frac{a}{\pi}$$

2.2　如自半径为 a 的球上，用一与球心相距为 b 的平面，切出一球形帽，求此球形帽的质心.

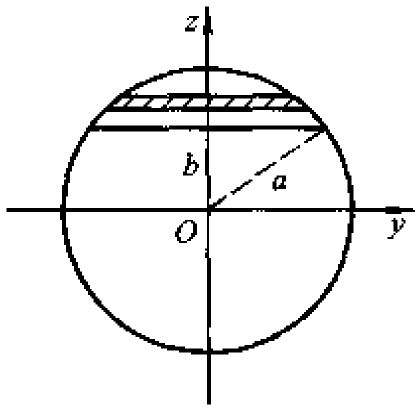
解 建立如题2.2.1图所示的球坐标系.

把球帽看成用垂直于 z 轴的所切层面的叠加(图中阴影部分所示).设均匀球体的密度为 ρ.

则 $dm = \rho dv = \rho\pi y^2 dz$

$= \rho\pi(a^2 - z^2)dz$

由对称性可知,此球帽的质心一定在 z 轴上.



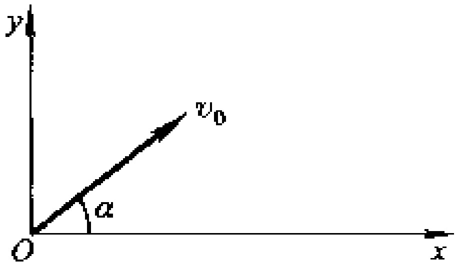
题2.2.1图

代入质心的计算公式,即

$$z_c = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{\int_b^a z \cdot \rho\pi(a^2 - z^2)dz}{\int_b^a \rho\pi(a^2 - z^2)dz}$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{(a+b)^2}{(2a+b)}$$

2.3 重为 W 的人,手里拿着一个重为 w 的物体.此人用与地平线成 α 角的速度 v_0 向前跳去.当他达到最高点时,将物体以相对速度 u 水平向后抛出.问由于物体的抛出,跳的距离增加了多少?



题2.3.1图

解 建立如题2.3.1图所示的直角坐标,原来 $W_人$ 与 $w_物$ 共同作一个斜抛运动.

当到达最高点人把物水平扔出后,人的速度改变,设为 v_x,此后人即以 v_x 的速度作平抛运动.

由此可知,两次运动过程中,在达到最高点时两次运动的水平距离是一致的(因为两次运动水平方向上均以 $v_{水平} = v_0\cos\alpha$ 作匀速直线运动,运动的时间也相同).

所以我们只需比较人把物抛出后水平运动距离的变化即可.

第一次运动:从最高点运动到落地,水平距离 s_1

$$s_1 = v_0\cos\alpha \cdot t \tag{①}$$

$$v_0\sin\alpha = gt \tag{②}$$

得
$$s_1 = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \tag{③}$$

第二次运动：在最高点人抛出物体时，水平方向不受外力，水平方向动量守恒，有

$$(W + w)v_0\cos\alpha = Wv_x + w(v_x - u) \tag{④}$$

由④得
$$v_x = v_0\cos\alpha + \frac{w}{W + w}u$$

水平距离
$$s_2 = v_x t = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{w}{g(W + w)}uv_0\sin\alpha \tag{⑤}$$

跳的距离增加了
$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{w}{(W + w)g}uv_0\sin\alpha$$

2.4 质量为 m_1 的质点，沿倾角为 θ 的光滑直角劈滑下，劈的本身，质量为 m_2，又可在光滑水平面上自由滑动．试求

(a) 质点水平方向的加速度 $\ddot{x}_1$；

(b) 劈的加速度 $\ddot{x}_2$；

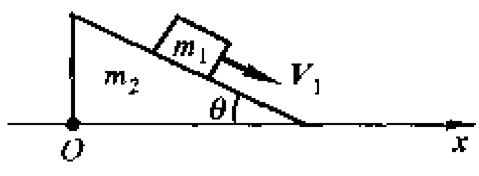
(c) 劈对质点的反作用力 R_1；

(d) 水平面对劈的反作用力 R_2．

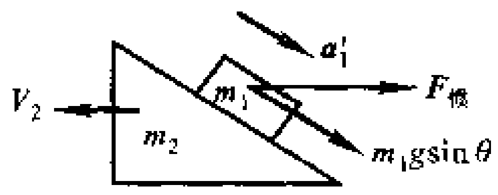
解 建立如题 2.4.1 图所示的水平坐标．

以 m_1、m_2 为系统研究，水平方向上系统不受外力，动量守恒，有

$$m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = 0 \tag{①}$$



题 2.4.1 图



题 2.4.2 图

对 m_1 分析：因为

$$a_{绝} = a_{牵} + a_{相对} \tag{②}$$

m_1 在劈 m_2 上下滑，以 m_2 为参照物，则 m_1 受到一个惯性力 $F_{惯} = -m_1\ddot{x}_2$（方向与 m_2 加速度方向相反）如题 2.4.2 图所示。所以 m_1 相对 m_2 下滑。由牛顿第二定律有

$$m_1 a'_1 = m_1 g\sin\theta + m_1\ddot{x}_2\cos\theta \tag{③}$$

所以 m_1 水平方向的绝对加速度由②可知：

$$a_{1绝//} = a'_1\cos\theta - \ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_1 = (g\sin\theta + \ddot{x}_2\cos\theta)\cos\theta - \ddot{x}_2 \tag{④}$$

联立①④，得

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_2\sin\theta\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta}g \tag{⑤}$$

把⑤代入①，得

$$\ddot{x}_2 = -\frac{m_1\sin\theta\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta}g \tag{⑥}$$

负号表示方向与 x 轴正向相反。

求劈对质点反作用力 R_1。用隔离法。单独考查质点 m_1 的受力情况。

因为质点垂直斜劈运动的加速度为 0，所以

$$R_1 - m_1 g\cos\theta + (-m_1\ddot{x}_2\sin\theta) = 0 \tag{⑦}$$

把⑥代入⑦得

$$R_1 = \frac{m_1 m_2\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta}g \tag{⑧}$$

水平面对劈的反作用力 R_2。仍用隔离法。因为劈在垂直水平方向上无加速度，所以

$$R_2 - m_2 g - R_1\cos\theta = 0 \tag{⑨}$$

于是

$$R_2 = \frac{m_2(m_1 + m_2)}{m_2 + m_1\sin^2\theta}g \tag{⑩}$$

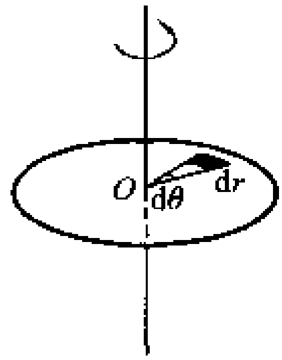
2.5 半径为 a，质量为 M 的薄圆片，绕垂直于圆片并通过圆心的竖直轴以匀角速 ω 转动，求绕此轴的动量矩。

解 因为质点组对某一固定点的动量矩

$$J = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i$$

所以对于连续物体对某一定点或定轴，我们就应把上式中的取和变为积分.

如题 2.5.1 图所示薄圆盘，任取一微质量元，



题 2.5.1 图

$$\mathrm{d}m = \rho \cdot r\mathrm{d}\theta \cdot \mathrm{d}r$$

$$\rho = \frac{M}{\pi a^2}$$

所以圆盘绕此轴的动量矩 J

$$J = \iint \boldsymbol{r} \times (\mathrm{d}m\boldsymbol{v}) = \iint r \cdot \rho r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \cdot \omega r$$

$$= \frac{M\omega}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2}Ma^2\omega$$

2.6 一炮弹的质量为 $M_1 + M_2$，射出时的水平及竖直分速度分别为 U 及 V. 当炮弹达到最高点时，其内部的炸药产生能量 E，使此炸弹分为 M_1 及 M_2 两部分. 在开始时，两者仍沿原方向飞行，试求它们落地时相隔的距离，不计空气阻力.

解 炮弹达到最高点时爆炸，由题目已知条件爆炸后，两者仍沿原方向飞行知，分成的两部分 M_1、M_2，速度分别变为沿水平方向的 v_1、v_2，并以此速度分别作平抛运动. 由前面知识可知，同一高处平抛运动的物体落地时的水平距离之差主要由初速度之差决定. 进而转化为求 v_1、v_2.

炮弹在最高点爆炸时水平方向无外力，所以水平方向动量守恒：

$$(M_1 + M_2)U = M_1 V_1 + M_2 V_2 \qquad ①$$

以 $(M_1 + M_2)$ 质点组作为研究对象，爆炸过程中能量守恒：

$$\frac{1}{2}(M_1 + M_2)U^2 = \frac{1}{2}M_1 V_1^2 + \frac{1}{2}M_2 V_2^2 - E \qquad ②$$

联立①②解之，得

$$v_1 = U + \sqrt{\frac{2EM_2}{(M_1 + M_2)M_1}}$$

$$v_2 = U - \sqrt{\frac{2EM_1}{(M_1 + M_2)M_2}}$$

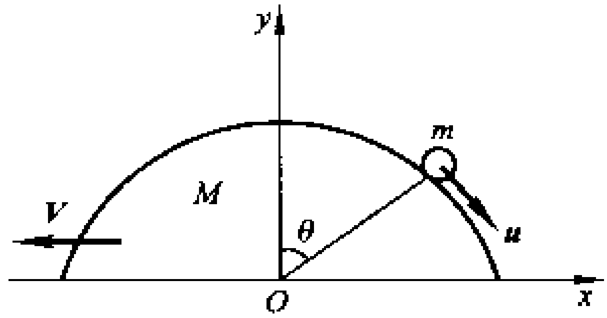
所以落地时水平距离之差 Δs

$$\Delta s = |s_1 - s_2| = |v_1 t - v_2 t| = |v_1 - v_2| \cdot \frac{V}{g}$$

$$= \frac{V}{g}\sqrt{2E\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)}$$

2.7 质量为 M，半径为 a 的光滑半球，其底面放在光滑的水平面上. 有一质量为 m 的质点沿此半球面滑下. 设质点的初位置与球心的联线和竖直向上的直线间所成之角为 α，并且起始时此系统是静止的，求此质点滑到它与球心的联线和竖直向上直线间所成之角为 θ 时 $\dot{\theta}$ 之值.

解 建立如题 2.7.1 图所示的直角坐标系.



题 2.7.1 图

当 m 沿半圆球 M 下滑时，M 将以 V 向所示正方向的反向运动.

以 M、m 组成系统为研究对象，系统水平方向不受外力，动量守恒，

即 $$MV = mv_x \quad ①$$

m 相对于对地固连的坐标系 Oxy 的绝对速度

$$\boldsymbol{V}_{绝} = \boldsymbol{V}_{相} + \boldsymbol{V}_{牵}$$

$\boldsymbol{V}_{相}$ 为 m 相对 M 运动速度　　$u = a\dot{\theta}$　　②

故水平方向　　$v_x = u\cos\theta - V$　　③

竖直方向　　$v_y = u\sin\theta$　　④

在 m 下滑过程中，只有保守力(重力)做功，系统机械能守恒：(以地面为重力零势能面)

$$mga\cos\alpha = mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv_{绝}^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad ⑤$$

$$v_{绝}^2 = v_x^2 + v_y^2 \qquad ⑥$$

把③④代入⑥　　$v_{绝}^2 = u^2 + V^2 - 2uV\cos\theta$　　⑦

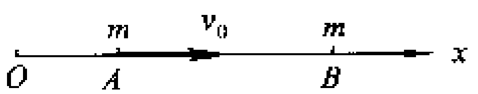
由①③　　$V = \dfrac{mu\cos\theta}{M+m}$　　⑧

把⑦⑧②代入⑤

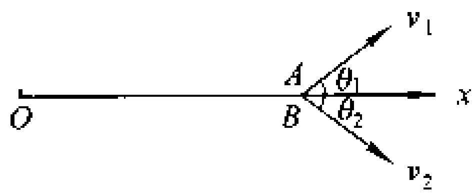
$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{a}\cdot\frac{\cos\alpha - \cos\theta}{1 - \dfrac{m}{M+m}\cos^2\theta}}$$

2.8　一光滑球 A 与另一静止的光滑球 B 发生斜碰．如两者均为完全弹性体，且两球的质量相等，则两球碰撞后的速度互相垂直，试证明之．

证　以 AB 连线为 x 轴建立如题 2.8.1 图所示坐标．



题 2.8.1 图



题 2.8.2 图

设 A 初始速度与 x 轴正向夹角 θ_0 碰撞后，设 A、B 运动如题 2.8.2 图所示．A、B 速度分别为 v_1、v_2，与 x 轴正向夹角分别为 θ_1、θ_2．

以 A、B 为研究对象．系统不受外力，动量守恒．

x 方向：　　$mv_0 = mv_1\cos\theta_1 + mv_2\cos\theta_2$　　①

垂直 x 方向有：$0 = mv_1\sin\theta_1 - mv_2\sin\theta_2$　　②

①^2 + ②^2 得　　$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$　　③

整个碰撞过程只有系统内力做功，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \quad ④$$

由③①得　　$2v_1v_2\cos(\theta_1 + \theta_2) = 0$

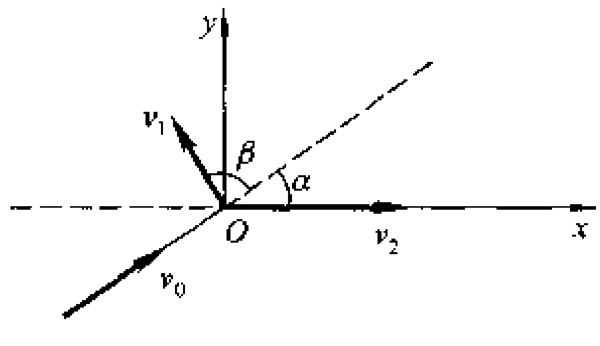
$$\theta_1 + \theta_2 = k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, 1, 2, \cdots)$$

即两球碰撞后速度相互垂直，结论得证．

2.9　一光滑小球与另一相同的静止小球相碰撞．在碰撞前，第一小球运动的方向与碰撞时两球的联心线成 α 角．求碰撞后第一小球偏过的角度 β 以及在各种 α 值下 β 角的最大值．设恢复系数 e 为已知．

解　类似的碰撞类型问题，我们一般要抓住动量守恒定理和机械能守恒定理的运用，以此来分析条件求出未知量．

设相同小球为 AB，初始时 A 小球速度 v_0，碰撞后球 A 速度 v_1，球 B 速度 v_2．以碰撞后 B 球速度所在方向为 x 轴正向建立如题 2.9.1 图所示的坐标（这样做的好处是可以减少未知量的分解，简化表达式）．以 A、B 为系统研究，碰撞过程中无外力做功，系统动量守恒．



题 2.9.1 图

x 方向上有：　$mv_0\cos\alpha = mv_1\cos(\alpha+\beta) + mv_2$　①

y 方向上有：　$mv_0\sin\alpha = mv_1\sin(\alpha+\beta)$　②

又因为恢复系数　$e = \dfrac{\text{碰后相对速度}}{\text{碰前相对速度}}$

$$= \frac{v_2 - v_1\cos(\alpha+\beta)}{v_0\cos\alpha}$$

即　$ev_0\cos\alpha = v_2 - v_1\cos(\alpha+\beta)$　③

用①　③　$v_1 = \dfrac{(1-e)v_0\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)}$　④

把①代入②　$v_0\sin\alpha = \dfrac{(1-e)v_0\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)}\sin(\alpha+\beta)$

$$\tan\beta = \frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}$$

$$\beta = \arctan\left[\frac{(1+e)\tan\alpha}{1-e+2\tan^2\alpha}\right]$$

求在各种 α 值下 β 角的最大值，即为求极值的问题.

我们有　$\dfrac{d\beta}{d\alpha} = 0$

得　$\dfrac{(1+e)\sec^2\alpha(1-e-2\tan^2\alpha)}{(1-e+2\tan^2\alpha)^2} = 0$

即　$1-e-2\tan^2\alpha = 0$

所以　$\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1-e}{2}}$

$$\beta_{\max} = \arctan\frac{1+e}{\sqrt{8(1-e)}}$$

即　$\tan\beta_{\max} = \dfrac{1+e}{\sqrt{8(1-e)}}$

又因为　$\csc^2\beta_{\max} = 1 + \cot^2\beta_{\max}$

$$= 1 + \frac{8(1-e)}{(1+e)^2}$$

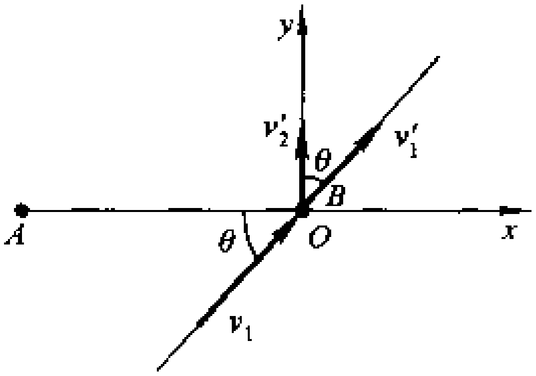
故　$\sin\beta_{\max} = \dfrac{1}{\csc\beta_{\max}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{8(1-e)}{(1+e)^2}}}$

$$=\frac{1}{3}\frac{+e}{-e}$$

所以 $\beta_{max}=\sin^{-1}\left(\frac{1+e}{3-e}\right)$

2.10 质量为 m_2 的光滑球用一不可伸长的绳系于固定点 A. 另一质量为 m_1 的球以与绳成 θ 角的速度 v_1 与 m_2 正碰. 试求 m_1 及 m_2 碰后开始运动的速度 v'_1 及 v'_2. 设恢复系数 e 为已知.

解 以 m_1, m_2 为研究对象. 当 m_1, m_2 发生正碰后, 速度分别变为 $\boldsymbol{v}_1'$, $\boldsymbol{v}_2'$, 随即 m_2 在不可伸长的绳 AB 约束下作圆周运动. 以 AB 的连线为 x 轴建立如题 2.10.1 图所示.



题 2.10.1 图

碰撞过程中无外力做功, 动量守恒:

$$m_1\boldsymbol{v}_1=m_1\boldsymbol{v}_1'+m_2\boldsymbol{v}_2' \quad ①$$

随即 m_2 在 AB 的约束下方向变为沿 y 轴的正向, 速度变为 $\boldsymbol{v}_2'$

故 y 方向有: $\quad m_1v_1\sin\theta=m_1v_1'\sin\theta+m_2v_2' \quad ②$

由恢复系数定义有:

$$e=\frac{\text{碰后相对速度}}{\text{碰前相对速度}}$$

$$=\frac{v_2'\sin\theta-v_1'}{v_1}$$

即 $$ev_1=v_2'\sin\theta-v_1' \quad ③$$

联立①②③得 $$v_1'=\frac{m_1\sin^2\theta-em_2}{m_2+m_1\sin^2\theta}v_1$$

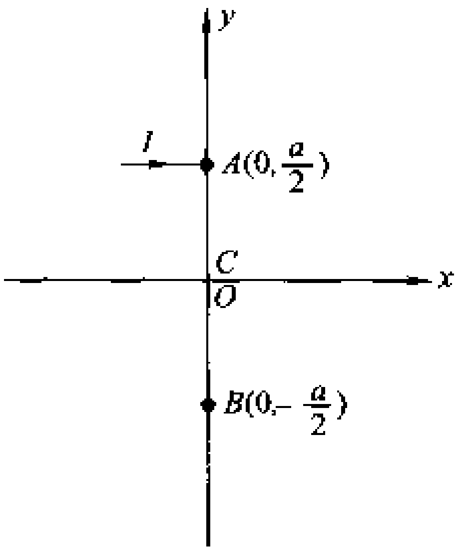
$$v_2'=\frac{m_1(1+e)\sin\theta}{m_2+m_1\sin^2\theta}v_1$$

2.11 在光滑的水平桌面上, 有质量各为 m 的两个质点, 用一不可伸长的绳紧直相连, 绳长为 a. 设其中一质点受到一个为绳

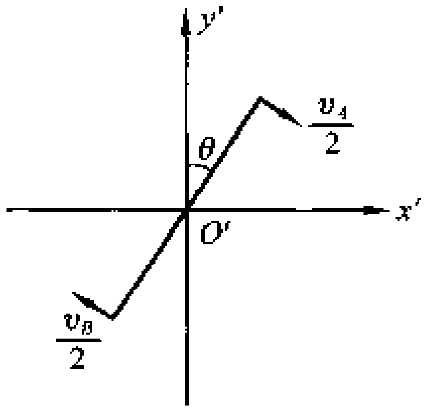
正交的冲量 I 的作用，求证此后两质点将各作圆滚线运动，且其能量之比为 $\cot^2\left(\frac{It}{2am}\right):1$，式中 t 为冲力作用的时间.

解 如图所示，有两质点 A、B 中间有一绳紧直相连，坐标分别为：$A\left(0,\frac{a}{2}\right)$，$B\left(0,-\frac{a}{2}\right)$，质量都为 m，开始时静止．现在有一冲量 $\boldsymbol{I}$ 作用于 A，则 $\boldsymbol{I}$ 作用后，A 得到速度 $v_A=\frac{I}{m}$，B 仍静止不动：$\boldsymbol{v}_B=0$．它们的质心 C 位于原点，质心速度为

$$\boldsymbol{v}_C=\frac{m\boldsymbol{v}_A+m\boldsymbol{v}_B}{2m}=\frac{\boldsymbol{v}_A}{2}$$



题 2.11.1 图



题 2.11.2 图

现在把坐标系建在质心 C 上，因为系统不再受外力作用，所以质心将以速率 $\frac{v_A}{2}$ 沿 x 轴正向匀速运动.

根据速度合成法则．在质心系 $O'x'y'$ 中，初始时 A、B 分别以速率 $\frac{v_A}{2}$ 沿 x 轴正向、反向运动．由于质心系是惯性系，且无外力，所以 A、B 将以速率 $\frac{v_A}{2}$ 绕质心作匀速圆周运动，因而它们作的是圆滚线运动.

经过时间 t 后，如图所示：

$$\theta=\frac{\frac{v_A}{2}}{\frac{a}{2}}t=\frac{v_A}{a}t=\frac{It}{am}$$

于是在 Oxy 系中

$$A\text{ 的速度：}\begin{cases}v_{Ax}=\dfrac{u_A}{2}(1+\cos\theta)\\[2ex] v_{Ay}=-\dfrac{u_A}{2}\sin\theta\end{cases}$$

$$B\text{ 的速度：}\begin{cases}v_{Bx}=\dfrac{u_A}{2}(1-\cos\theta)\\[2ex] v_{By}=\dfrac{u_A}{2}\sin\theta\end{cases}$$

因此

$$E_A:E_B=\frac{\left[\frac{v_A}{2}\cdot(1+\cos\theta)\right]^2+\left(\frac{v_A}{2}\sin\theta\right)^2}{\left[\frac{v_A}{2}(1-\cos\theta)\right]^2+\left(-\frac{v_A}{2}\sin\theta\right)^2}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\cot^2\frac{\theta}{2}:1$$

$$=\cot^2\left(\frac{It}{2am}\right):1$$

2.12 质量为 m_1 的球以速度 v_1 与质量为 m_2 的静止球正碰．求碰撞后两球相对于质心的速度 V_1' 和 V_2' 又起始时，两球相对于质心的动能是多少？恢复系数 e 为已知．

解 对于质心系的问题，我们一般要求出相对固定参考点的物理量，再找出质心的位置和质心运动情况，由此去计算物体相对或绝对物理量及其间的关系．

由题可知，碰前 m_1 速度 v_1，m_2 速度 $v_2=0$．

碰后速度 m_1m_2 分别设为 v_1'，v_2'．

碰撞过程无外力做功，动量守恒．

$$m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2' \qquad ①$$

由恢复系数 e $$e=\left|\frac{v_2'-v_1'}{v_1}\right| \tag{②}$$

联立①② $$v_1'=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}v_1$$

$$v_2'=\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}v_1$$

再由质点组质心的定义：

$$r_c=\frac{m_1r_1+m_2r_2}{m_1+m_2}$$

r_c 为质心对固定点位矢，r_1,r_2 分别为 m_1,m_2 对同一固定点的位矢

所以 $$v_c=\dot{r}_c=\frac{m_1\dot{r}_1+m_2\dot{r}_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1v_1'+m_2v_2'}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

（质点组不受外力，所以质心速度不变.）

设两球碰撞后相对质心的速度 V_1'，V_2'.

$$V_1'=v_1'-v_c=\frac{m_1-em_2}{m_1+m_2}v_1-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

$$=-\frac{em_2}{m_1+m_2}v_1 \qquad \text{（负号表示与 } v_1 \text{ 反向）}$$

$$V_2'=v_2'-v_c=\frac{m_1(1+e)}{m_1+m_2}v_1-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

$$=\frac{em_1}{m_1+m_2}v_1$$

同理，碰撞前两球相对质心的速度

$$V_1=v_1-v_c=v_1-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1=\frac{m_2}{m_1+m_2}v_1$$

$$V_2=v_2-v_c=-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 \text{（负号表示方向与 } v_1 \text{ 相反）}$$

所以开始时两球相对质心的动能：

$$T=\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2$$

$$=\frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}v_1\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(-\frac{m_1}{m_1+m_2}v_1\right)^2$$

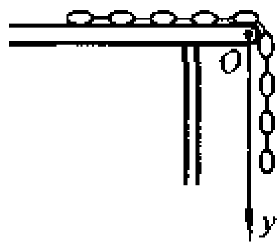
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\cdot v_1^2$$

2.13 长为 l 的均匀细链条伸直地平放在水平光滑桌面上，其方向与桌边缘垂直，此时链条的一半从桌上下垂.起始时，整个链条是静止的.试用两种不同的方法，求此链条的末端滑到桌子的边缘时，链条的速度 v.

解一 用动能定理.

$$\mathrm{d}T=\mathrm{d}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_{(i)}^{(e)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}_i^{(i)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$$

以桌边为原点，竖直向下为正向建立如题 2.13.1 图所示坐标.设链条长 l，质量 m.初始时链条速度 $v_0=0$，末端滑到桌边时整个链条速度为 v.



题 2.13.1 图

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{1}{2}mg+\frac{mg}{l}y\right)\mathrm{d}y$$

即 $$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mg\cdot\frac{l}{2}+\frac{mg}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$v=\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

解二 用机械能守恒方法.

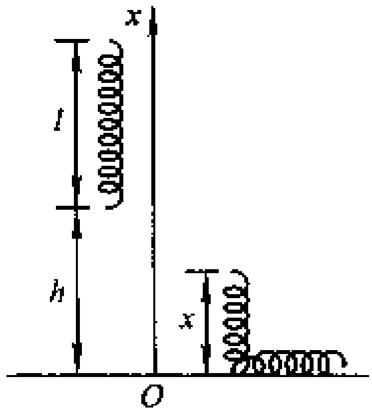
在链条下滑过程中，只有保守力重力做功，所以链条的机械能守恒.

以桌面所在平面为重力零势能面.

$$-\left(\frac{m}{2}g\right)\cdot\frac{l}{4}=-mg\cdot\frac{l}{2}+\frac{1}{2}mv^2$$

有 $$v=\frac{\sqrt{3gl}}{2}$$

2.14 一条柔软、无弹性、质量均匀的绳索，竖直地自高处下坠至地板上．如绳索的长度等于 l，每单位长度的质量等于 σ．求当绳索剩在空中的长度等于 $x(x<l)$时，绳索的速度及它对地板的压力．设开始时，绳索的速度为零，它的下端离地板的高度为 h．



题 2.14.1 图

解 此类题为变质量问题，我们一般研究运动过程中质量的变化与力的关系

$$F_{(t)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)$$

以竖直向上为 x 轴正向建立如题 2.14.1 图所示坐标．

绳索离地面还剩 x 长时受重力 $F_{(t)}=-\sigma xg$

则
$$\sigma xg=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sigma xv)$$

$$-xg=\frac{\mathrm{d}(xv)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$-g=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$\int_0^v v\mathrm{d}v=-\int_{h+l}^x g\mathrm{d}x$$

所以
$$v^2=2g(h+l-x)$$

求地板的压力，由牛顿第三定律知，只需求出地板对绳索的支持力 N 即可，它们是一对作用力与反作用力．这时我们以快要落地的一小微元作为研究对象．它的速度由 v 变为 0．用动量定理，

有
$$N-\sigma(l-x)g=\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}(\sigma xv)}{\mathrm{d}t}$$

$$=v\sigma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sigma v^2$$

又因为 $v^2=2g(h+l-x)$

$$
\begin{aligned}
N &= \sigma(l-x)g+\sigma\cdot 2g(h+l-x) \\
&= \sigma g[2h+3(l-x)]
\end{aligned}
$$

2.15 机枪质量为 M，放在水平地面上，装有质量为 M' 的子弹，机枪在单位时间内射出子弹的质量为 m，其相对于地面的速度则为 u. 如机枪与地面的摩擦系数为 μ，试证当 M' 全部射出后，机枪后退的速度为

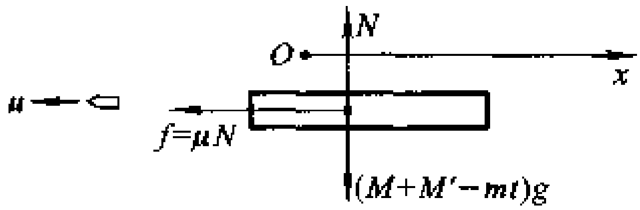
$$
\frac{M'}{M}u-\frac{(M+M')^2-M^2}{2mM}\mu g
$$

解 这是一道变质量的问题，对于此类问题，我们由书上 p.137 的(2.7.2)式

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u=F \qquad ①
$$

来分析.

以机枪后退方向作为 x 轴正向，建立如题 2.15.1 图的坐标.



题 2.15.1 图

竖直方向上支持力与重力是一对平衡力.

水平方向上所受合外力 F 即为摩擦力

$$
F=f=-\mu N=-\mu(M+M'-mt)g \qquad ②
$$

单位时间质量的变化 $\dfrac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}t}=m$ ③

由①②式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(M+M'-mt)v]-\dfrac{\mathrm{d}M'}{\mathrm{d}t}u=-\mu g(M+M'-mt)$

$$
\int_0^v \mathrm{d}[(M+M'-mt)v]-\int_0^u \mathrm{d}M'u=-\mu g\int_0^{\frac{M'}{m}}(M+M'-mt)\mathrm{d}t
$$

$$\left(M+M'-m\frac{M'}{m}\right)v-M'u=-\mu g(M+M')\frac{M'}{m}+\mu gm\,\frac{1}{2}\left(\frac{M'}{m}\right)^2$$

所以
$$v=\frac{M'}{M}u-\frac{(M'+M)^2-M^2}{2Mm}\mu g$$

2.16 雨滴下落时,其质量的增加率与雨滴的表面积成正比例,求雨滴速度与时间的关系.

解 这是一个质量增加的问题.雨滴是本体 m、导致雨滴 m 变化的微元 Δm 的速度 $u=0$.

所以我们用书上 p.138 的(2.7.4)式分析

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv)=F \qquad ①$$

雨滴的质量变化是一类比较特殊的变质量问题.

(a) 我们知道处理这类问题常常理想化模型的几何形状.对于雨滴我们常看成球形,设其半径为 r,则雨滴质量 m 是与半径 r 的三次方成正比(密度看成一致不变的).

$$m=k_1r^3 \qquad ②$$

(b) 由题目可知质量增加率与表面积成正比.

即
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=k\cdot4\pi r^2=k_2r^2 \qquad ③$$

k_1,k_2 为常数.

我们对②式两边求导

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=k_1\cdot3r^2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad ④$$

由于③=④,所以

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{k_2}{3k_1}=\lambda \qquad ⑤$$

对⑤式两边积分

$$\int_a^r\mathrm{d}r=\int_0^t\lambda\,\mathrm{d}t$$

$$r=\lambda t+a \qquad ⑥$$

代入②

$$m = k_1(\lambda t + a)^3 \qquad ⑦$$

(c) 以雨滴下降方向为正向，对①式分析

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_1(\lambda t + a)^3 v] = k_1(\lambda t + a)^3 g \qquad ⑧$$

$$\int_0^t \mathrm{d}[k_1(\lambda t + a)^3 v] = \int_0^t k_1(\lambda t + a)^3 g \mathrm{d}t$$

$$k_1(\lambda t + a)^3 v = \frac{1}{\lambda}k_1 g \ \frac{1}{4}(\lambda t + a)^4 + k_3 \qquad (k_3 \text{为常数})$$

当 $t = 0$ 时，$v = 0$，所以

$$k_3 = -\frac{k_1 g a^4}{4\lambda}$$

$$v = \frac{g}{4\lambda}[\lambda t + a - \frac{a^4}{(\lambda t + a)^3}]$$

2.17 设用某种液体燃料发动的火箭，喷气速度为2 074 m/s，单位时间内所消耗的燃料为原始火箭总质量的$\frac{1}{60}$. 如重力加速度 g 的值可以认为是常数，则利用此种火箭发射人造太阳行星时，所携带的燃料的重量至少是空火箭重量的 300 倍，试证明之.

证 这是变质量问题中的减质量问题，我们仍用书上 p. 137 (2.7.2)式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u = F \qquad ①$$

来分析.

设空火箭质量 m_0，燃料质量 m'. 以向上为正方向，则火箭任一时刻质量

$$m = m_0 + m' - \frac{m_0 + m'}{60}t \qquad ②$$

喷气速度 2074 m/s 是指相对火箭的速度，即 $v_{相} = 2074$ m/s.

由①式
$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}u = F$$

$$F = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(v - u) + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v_{相} + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

即

$$-\left(m_0+m'-\frac{m_0+m'}{60}t\right)g = -\frac{m_0+m'}{60}v_{相} + \left(m_0+m'-\frac{m_0+m'}{60}t\right)\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

化简

$$\mathrm{d}v = -g\mathrm{d}t + \frac{\frac{m_0+m'}{60}v_{相}\cdot\mathrm{d}t}{m_0+m'-\frac{m_0+m'}{60}t}$$

对两边积分

$$v = -gt - v_{相}\ln\left(1-\frac{t}{60}\right) \quad ③$$

此即火箭速度与时间的关系.

当火箭燃料全部燃尽所用时间 t，由题可知

$$t = -\frac{m'}{-\frac{m_0+m'}{60}} = \frac{60m'}{m_0+m'} \quad ④$$

代入③可得火箭最终的速度 v_{max}（即速度的最大值）.

$$v_{max} = -g\cdot\frac{60m'}{m_0+m'} - v_{相}\ln\left(1-\frac{m'}{m_0+m'}\right)$$

考虑到

$$\frac{\mathrm{d}v_{max}}{\mathrm{d}x} = \frac{v_{相}(1+x)-60g}{(1+x)^2}$$

其中 $x=\frac{m'}{m_0}$，易知当 $x\geqslant 0$ 时，$\frac{\mathrm{d}v_{max}}{\mathrm{d}x}$ 恒成立，即 v_{max} 为 $\frac{m'}{m_0}$ 的增函数.

又当 $\frac{m'}{m_0}=300$ 时，

$$v_{\max} = g \cdot \frac{60\frac{m'}{m_0}}{1+\frac{m'}{m_0}} - v_{相}\ln\left(1-\frac{\frac{m'}{m_0}}{1+\frac{m'}{m_0}}\right)$$

$$\doteq 11.25\ \text{km/s}$$

而要用此火箭发射人造太阳行星需要的速度至少应为第二宇宙速度 $v_2 = 11.2$ km/s

故所携带燃料重量至少是空火箭重量的300倍.

2.18 原始总质量为 M_0 的火箭,发射时单位时间内消耗的燃料与 M_0 正比,即 αM_0(α 为比例常数),并以相对速度 v 喷射.已知火箭本身的质量为 M,求证只有当 $\alpha v > g$ 时,火箭才能上升;并证能达到的最大速度为

$$v\ln\frac{M_0}{M} - \frac{g}{\alpha}\left(1-\frac{M}{M_0}\right)$$

能达到的最大高度为

$$\frac{v^2}{2g}\left(\ln\frac{M_0}{M}\right)^2 + \frac{v}{\alpha}\left(1-\frac{M}{M_0}-\ln\frac{M_0}{M}\right)$$

证 要使火箭上升,必须有发动机推力>火箭的重量,即

$$v_{相}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} > M_0 g$$

$$v_{相}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = v\alpha M_0$$

故 $$\alpha M_0 v > M_0 g$$

即 $\alpha v > g$ 时火箭才能上升,结论得证.

由于喷射速度 $v_{相} = v$ 是常数,单位时间放出的质量

$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \alpha M_0$ 质量变化是线性规律

$$f = 1 - \alpha t = \frac{M_0}{M} \quad ①$$

火箭飞行速度 $$v_{火} = v\ln(1-\alpha t) - gt \quad ②$$

又因为燃料燃烧时间 $\qquad t=\dfrac{M_0-M}{\alpha M_0}$ ③

代入②得火箭最大速度 $v_{\max}$

$$v_{\max}=v\ln\frac{M_0}{M}-g\frac{M_0-M}{\alpha M_0}$$

$$=v\ln\frac{M_0}{M}-\frac{g}{\alpha}\left(1-\frac{M}{M_0}\right)$$

又因为②亦可写成 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v_{火}=v\ln(1-\alpha t)-gt$

积分可得 $s=\dfrac{v}{\alpha}[(1-\alpha t)\ln(1-\alpha t)+\alpha t]-\dfrac{1}{2}gt^2$ ④

从开始到燃料燃尽这一段时间内火箭上升高度 S_1. 把③代入④得

$$S_1=-\frac{1}{2}g\left(\frac{M_0-M}{\alpha M_0}\right)^2+\frac{v}{\alpha}\left(\frac{M}{M_0}-\ln\frac{M}{M_0}+\frac{M_0-M}{M_0}\right)$$

之后火箭作初速度为 $v_{\max}$ 的竖直上抛运动.

可达高度 S_2

$$S_2=\frac{v_{\max}^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}\left(\ln\frac{M_0}{M}\right)^2-\frac{v}{\alpha}\left(1-\frac{M}{M_0}\right)\ln\frac{M}{M_0}+\frac{g}{2a^2}\left(1-\frac{M}{M_0}\right)^2$$

故火箭能达到的最大高度

$$S_{\max}=S_1+S_2$$

$$=\frac{v^2}{2g}\left(\ln\frac{M_0}{M}\right)^2+\frac{v}{\alpha}\left(1-\frac{M}{M_0}-\ln\frac{M_0}{M}\right)$$

2.19 试以行星绕太阳的运动为例,验证维里定理. 计算时可利用 1.9 中所有的关系和公式,即认为太阳是固定不动的.

证 假设该行星作椭圆运动,质量为 m,周期为 τ. 某一时刻位置为 $\boldsymbol{r}$,速度为 $\boldsymbol{v}$. 则

$$T=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1}{2}mv^2\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\frac{1}{\tau}\int_0^\tau\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=\frac{1}{\tau}\left[\frac{1}{2}m\int_0^\tau\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})-\frac{1}{2}m\int_0^\tau\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}\right]$$

$$= -\frac{m}{2\tau}\int_0^{\tau} \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}$$

又因为 $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，于是

$$T = -\frac{m}{2\tau}\int_0^{\tau} \boldsymbol{r} \cdot \left(-\frac{GM}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{m}{2\tau}\int_0^{\tau} -\frac{GM}{r}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\frac{GMm}{r}\mathrm{d}t$$

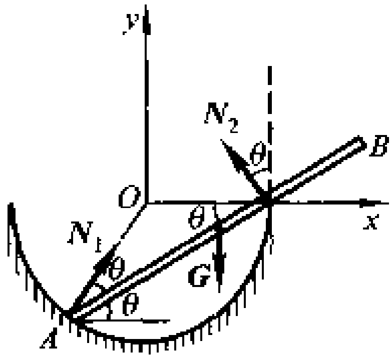
$$= \frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$$

第三章　刚体力学

3.1　半径为 r 的光滑半球形碗，固定在水平面上．一均质棒斜靠在碗缘，一端在碗内，一端则在碗外，在碗内的长度为 c，试证棒的全长为

$$\frac{4(c^2-2r^2)}{c}$$

解　如题3.1.1图．均质棒受到碗的弹力分别为 $\boldsymbol{N}_1,\boldsymbol{N}_2$，棒自身重力为 $\boldsymbol{G}$．棒与水平方向的夹角为 θ．设棒的长度为 l．



题3.1.1图

由于棒处于平衡状态，所以棒沿 x 轴和 y 轴的合外力为零．沿过 A 点且与 z 轴平行的轴的合力矩为0．即：

$$\sum F_x = N_1\cos2\theta - N_2\sin\theta = 0 \qquad ①$$

$$\sum F_y = N_1\sin2\theta + N_2\cos\theta - G = 0 \qquad ②$$

$$\sum M_i = N_2c - G\frac{l}{2}\cos\theta = 0 \qquad ③$$

由①②③式得：

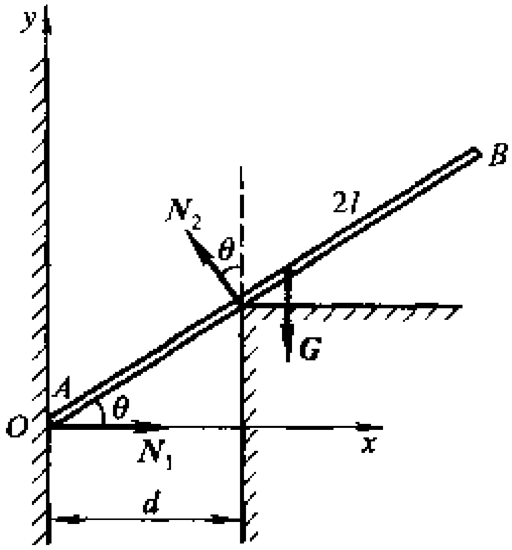
$$l = \frac{2c(2\cos^2\theta-1)}{\cos^2\theta} \qquad ④$$

又由于　$2r\cos\theta = c$，即 $\cos\theta = \dfrac{c}{2r}$　⑤

将⑤代入④得：

$$l = \frac{4(c^2-2r^2)}{c}$$

3.2 长为 $2l$ 的均质棒，一端抵在光滑墙上，而棒身则如图示斜靠在与墙相距为 $d(d\leqslant l\cos\theta)$ 的光滑棱角上. 求棒在平衡时与水平面所成的角 θ.



题 3.2.1 图

解 如题 3.2.1 图所示，均质棒分别受到光滑墙的弹力 $\boldsymbol{N}_1$，光滑棱角的弹力 $\boldsymbol{N}_2$，及重力 $\boldsymbol{G}$. 由于棒处于平衡状态，所以沿 y 方向的合力及沿 z 方向的合力矩为零.

即 $\sum F_y = N_2\cos\theta - G = 0$ ①

$$\sum M_z = N_2\frac{d}{\cos\theta} - G\frac{2l}{2}\cos\theta = 0 \qquad ②$$

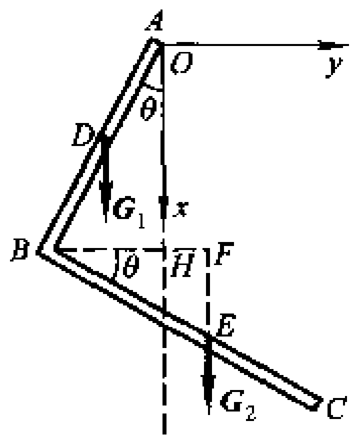
由①②式得：
$$\cos^3\theta = \frac{d}{l}$$

所以
$$\theta = \arccos\left(\frac{d}{l}\right)^{1/3}$$

3.3 两根均质棒 AB、BC 在 B 处刚性联结在一起，且 $\angle ABC$ 形成一直角. 如将此棒的 A 点用绳系于固定点上，则当平衡时，AB 和竖直直线所成的角 θ_0 满足下列关系

$$\tan\theta_0 = \frac{b^2}{a^2+2ab}$$

式中 a 及 b 为棒 AB 和 BC 的长度，试证明之.



题 3.3.1 图

解 如题 3.3.1 图所示. AB 棒受到重力 $\boldsymbol{G}_1 = \rho ag\boldsymbol{i}$. BC 棒受到的重力 $\boldsymbol{G}_2 = \rho bg\boldsymbol{i}$. 设均质棒的线密度为 ρ.

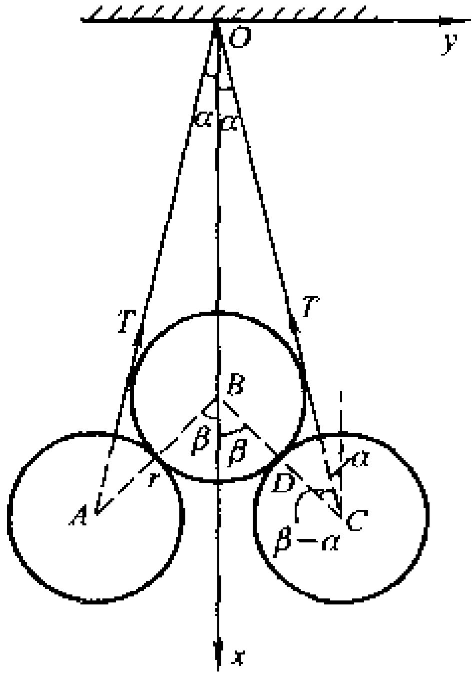
由题意可知，整个均质棒沿 z 轴方向的合力矩为零.

$$\sum M_z = G_1 \cdot OD\sin\theta - G_2(BF - BH)$$

$$= \rho g a \frac{a}{2}\sin\theta - \rho g b\left(\frac{b}{2}\cos\theta - a\sin\theta\right) = 0$$

$$\tan\theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$$

3.4 相同的两个均质光滑球悬在结于定点 O 的两根绳子上，此两球同时又支持一个等重的均质球，求 α 角及 β 角之间的关系.



题 3.4.1 图

解 如题 3.4.1 图. Ox 轴竖直向下，相同的球 A、B、C 互切，B、C 切于 D 点. 设球的重力大小为 G，半径为 r，则对 A、B、C 三个球构成的系统来说，在 x 轴方向的合力应为零. 即：

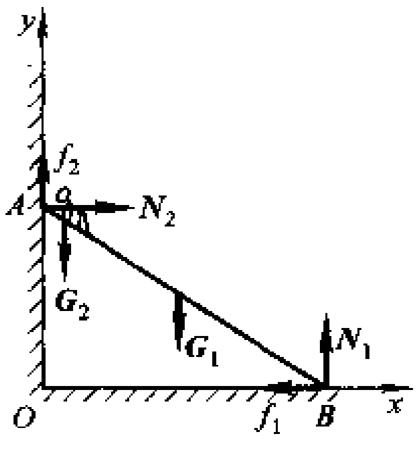
$$\sum F_x = 3G - 2T\cos\alpha = 0 \quad ①$$

对于 C 球. 它相对于过 D 点与 z 轴平行的轴的合力矩等于零. 即：

$$\sum M_D = Tr\sin(\beta - \alpha) - Gr\sin\beta = 0 \qquad ②$$

由①②式得： $\tan\beta = 3\tan\alpha$

3.5 一均质的梯子，一端置于摩擦系数为$\frac{1}{2}$的地板上，另一端则斜靠在摩擦系数为$\frac{1}{3}$的高墙上，一人的体重为梯子的三倍，爬到梯的顶端时，梯尚未开始滑动，则梯与地面的倾角，最小当为若干?



题 3.5.1 图

解 如题 3.5.1 图. 梯子受到地面和墙的弹力分别为 N_1，N_2，受地面和墙

的摩擦力分别为 f_1,f_2. 梯子和人的重力分别为 G_1、G_2 且 $G_2=3G_1$. 设梯长为 l,与地面夹角为 θ. 由于梯子处于平衡,所以

$$\sum F_x = N_2 - f_1 = 0 \qquad ①$$

$$\sum F_y = f_2 + N_1 - G_1 - G_2 = 0 \qquad ②$$

且梯子沿过 A 点平行于 z 轴的轴的合力矩为零. 即:

$$\sum M_i = G_2 l\cos\theta + G_1\frac{l}{2}\cos\theta - f_2 l\cos\theta - N_2 l\sin\theta = 0 \qquad ③$$

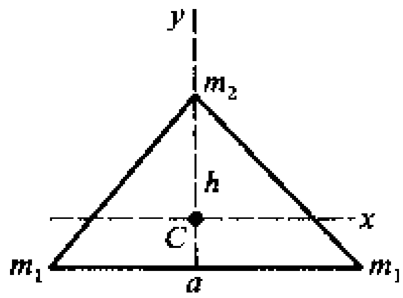
又因为梯子是一个刚体. 当一端滑动时,另一端也滑动,所以当梯与地面的倾角达到最小时,

$$f_1 = \frac{1}{2}N_1 \qquad ④$$

$$f_2 = \frac{1}{3}N_2 \qquad ⑤$$

由①②③④⑤得: $\tan\theta = \dfrac{41}{24}$

所以 $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{41}{24}\right)$



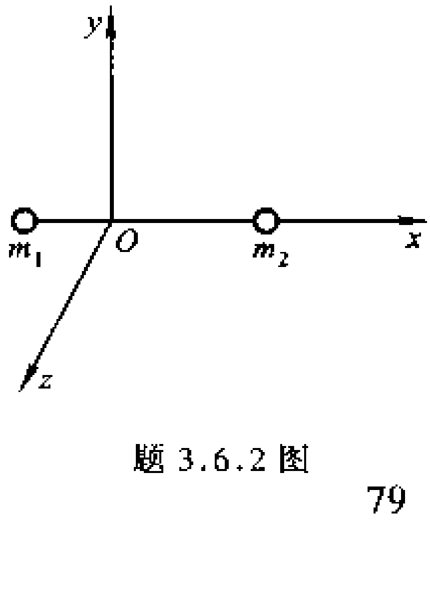
题 3.6.1 图

3.6 把分子看作相互间距离不变的质点组,试决定以下两种情况下分子的中心主转动惯量:

(a) 二原子分子. 它们的质量是 m_1,m_2,距离是 l.

(b) 形状为等腰三角形的三原子分子,三角形的高是 h,底边的长度为 a. 底边上两个原子的质量为 m_1,顶点上的为 m_2.

解 (a)取二原子的连线为 x 轴,而 y 轴与 z 轴通过质心. O 为质心,则 Ox,Oy,Oz 轴即为中心惯量主轴. 设 m_1、m_2 的坐标为 $(l_1,0,0),(l_2,0,0)$,因为 O 为质心(如题 3.6.2 图).



题 3.6.2 图

故 $$m_1 l_1 + m_2 l_2 = 0 \quad ①$$

且 $$l_2 - l_1 = l \quad ②$$

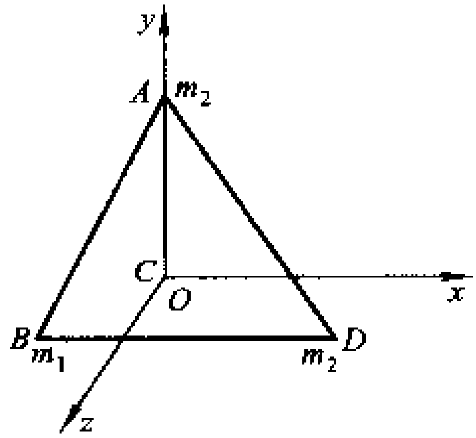
由①②得： $$l_1 = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}$$

所以中心惯量主轴： $$I_1 = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = 0$$

$$I_2 = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

$$I_3 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2$$

(b)如题 3.6.3 图所示，该原子由 A、B、D 三个原子构成. C 为三原子分子的质心. 由对称性可知，图中 Cx、Cy、Cz 轴即为中心惯量主轴. 设 A、B、D 三原子的坐标分别为 $(0, y_A, 0), \left(-\frac{a}{2}, y_B, 0\right)\left(\frac{a}{2}, y_D, 0\right)$



题 3.6.3 图

因为 C 为分子的质心.

所以

$$y_C = \frac{m_A y_A + m_B y_B + m_D y_D}{m_A + m_B + m_D}$$

$$= \frac{m_2 y_A + m_1 y_B + m_1 y_D}{m_2 + m_1 + m_1} = 0 \quad ①$$

又由于 $$y_B = y_D \quad ②$$

$$y_A - y_B = h \quad ③$$

由①②③得： $y_A = \frac{2m_1 h}{2m_1 + m_2}, y_B = y_D = -\frac{m_2 h}{2m_1 + m_2}$

故该分子的中心主转动惯量

$$I_1 = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \frac{2m_1 m_2}{2m_1 + m_2} h^2 \quad (i = A, B, D)$$

$$I_2 = \sum m_i (z_i^2 + x_i^2) = \frac{m_1 a^2}{2} \quad (i = A, B, D)$$

$$I_3 = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \frac{2m_1m_2}{2m_1 + m_2}h^2 + \frac{m_1a^2}{2} \quad (i = A, B, D)$$

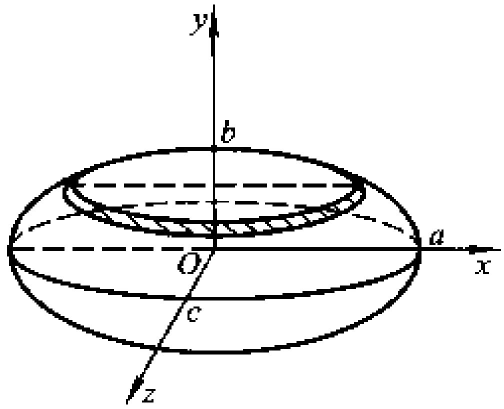
3.7 如椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

试求此椭球绕其三个中心主轴转动时的中心主转动惯量. 设此椭球的质量为 m, 并且密度 ρ 是常数.

解 如题 3.7.1 图所示. 沿 y 轴平行于 Oxz 平切椭球得切面为一椭圆, 则该椭圆方程为:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)} = 1$$



题 3.7.1 图

可求该切面的面积

$$S_{(y)} = \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

故积分

$$\int y^2 \mathrm{d}m = \int_{-b}^{b} y^2 S_{(y)} \cdot \rho \mathrm{d}y = \int_{-b}^{b} y^2 \pi ac\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\rho \mathrm{d}y$$

$$= \frac{4}{15}\pi\rho ab^3c$$

同理可求: $\int x^2 \mathrm{d}m = \frac{4}{15}\pi\rho a^3bc$, $\int z^2 \mathrm{d}m = \frac{4}{15}\pi\rho abc^3$

故中心主转动惯量:

$$I_1 = \int (y^2 + z^2)\mathrm{d}m = \frac{4}{15}\pi\rho abc(b^2 + c^2)$$

$$I_2 = \int (x^2 + z^2)\mathrm{d}m = \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2 + c^2)$$

$$I_3 = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m = \frac{4}{15}\pi\rho abc(a^2 + b^2)$$

又由于椭球体积

$$V=\int_{-b}^{b}S_{(y)}\mathrm{d}y=\int_{-b}^{b}\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\pi abc$$

故
$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{3m}{4\pi abc}$$

将 ρ 代入 I_1,I_2,I_3 得：

$$I_1=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$$

$$I_2=\frac{1}{5}m(a^2+c^2)$$

$$I_3=\frac{1}{5}m(a^2+b^2)$$

3.8 半径为 R 的非均质圆球，在距中心 r 处的密度可以用下式表示：

$$\rho=\rho_0\left(1-\alpha\frac{r^2}{R^2}\right)$$

式中 ρ_0 及 α 都是常数. 试求此圆球绕直径转动时的回转半径.

解 设 $\mathrm{d}m$ 表示距球心为 r 的一薄球壳的质量，则

$$\mathrm{d}m=\pi r^2\rho\mathrm{d}r=\pi\rho_0r^2\left(1-\alpha\frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}r$$

所以该球对球心的转动惯量

$$I=\int_0^R r^2\mathrm{d}m=\pi\rho_0\int_0^R r^4\left(1-\alpha\frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\pi\rho_0R^5\frac{7-5\alpha}{35} \qquad ①$$

在对称球中，绕直径转动时的转动惯量

$$I'=\frac{2}{3}I \qquad ②$$

又球的质量
$$m=\int_0^R\mathrm{d}m=\pi\rho_0\int_0^R r^2\left(1-\alpha\frac{r^2}{R^2}\right)\mathrm{d}r$$

$$=\pi\rho_0R^3\frac{5-3\alpha}{15} \qquad ③$$

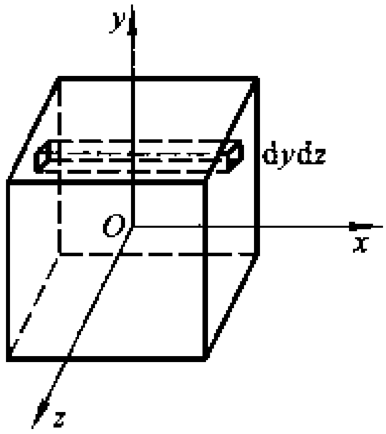
又绕直径的回转半径 $k=\sqrt{\dfrac{I'}{m}}$ ④

由①②③④得：$$k=\sqrt{\frac{14-10\alpha}{35-21\alpha}}R$$

3.9 立方体绕其对角线转动时的回转半径为

$$k=\frac{d}{3\sqrt{2}}$$

试证明之．式中 d 为对角线的长度．



题 3.9.1 图

解 如题 3.9.1 图所示 $Oxyz$ 坐标系．O 为正方体中心．Ox、Oy、Oz 分别与正方体的边平行．由对称性可知，Ox、Oy、Oz 轴就是正方体的中心惯量主轴．设正方体的边长为 a．

设 $a\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 为平行于 x 轴的一小方条的体积，则正方体绕 x 轴的转动惯量

$$I_{xx}=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\rho a(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{m}{6}a^2$$

根据对称性得：$I_{yy}=I_{zz}=I_{xx}=\dfrac{m}{6}a^2$

易求正方体的对角线与 Ox、Oy、Oz 轴的夹角都为 θ．且

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故正方体绕对角线的转动惯量

$$I=I_{xx}\cos^2\theta+I_{yy}\cos^2\theta+I_{zz}\cos^2\theta=\frac{m}{6}a^2 \qquad ①$$

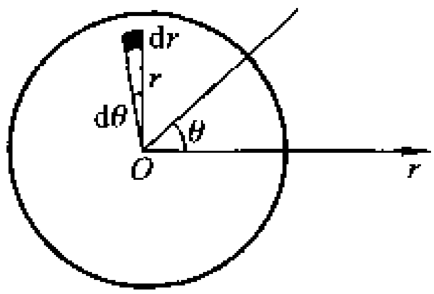
又由于 $$d=\sqrt{3}a \qquad ②$$

绕对角线的回转半径 $$k=\sqrt{\frac{I}{m}} \qquad ③$$

由①②③得：$$k=\frac{d}{3\sqrt{2}}$$

3.10 一均质圆盘，半径为 a，放在粗糙水平桌上，绕通过其

中心的竖直轴转动，开始时的角速度为 ω_0. 已知圆盘与桌面的摩擦系数为 μ. 问经过多少时间后盘将静止?



题 3.10.1 图

解 如题 3.10.1 图. z 轴过 O 点垂直纸面向外. 均质圆盘的密度为 ρ. 设盘沿顺时针转动，则沿 z 的方向有

$$\frac{\mathrm{d}J_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

即

$$I\dot{\omega}_z - M_z \qquad ①$$

I 为转盘绕 z 轴的转动惯量： $I = \frac{1}{2}ma^2$（m 为盘的质量），

$$\omega_z = -\omega \qquad ②$$

（ω 为盘转动的角频率，负号因为规定顺时针转动）

$$M_z = \int_0^{2\pi}\int_0^a \mu g\rho r^2 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{3}\mu g\rho a^3$$

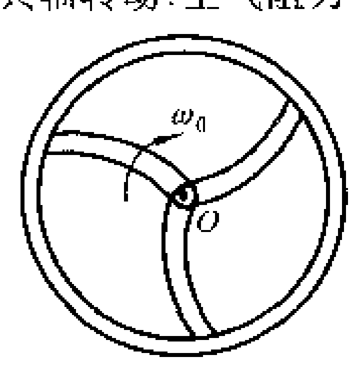
$$-\frac{2}{3}\mu g m a\,(m = \pi\rho a^2) \qquad ③$$

由①②③得 $\dot{\omega} = -\frac{4\mu g}{3a}$

又因为 $\omega_{(0)} = \omega_0$， 故 $\omega_{(t)} = \omega_0 - \frac{4\mu g}{3a}t$

所以 $\omega_{(t)} - 0$，得 $t = \frac{3a\omega_0}{4\mu g}$

3.11 通风机的转动部分以初角速 ω_0 绕其轴转动. 空气阻力矩与角速成正比，比例常数为 k. 如转动部分对其轴的转动惯量为 I，问经过多少时间后，其转动的角速减为初角速的一半? 又在此时间内共转了多少转?



题 3.11.1 图

解 如题 3.11.1 图所示，设 z 轴过 O 点垂直纸面指向外.

则对 z 轴有：
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=M_z$$

设通风机转动的角速度大小为 $\omega_{(t)}$，由于通风机顺时针转动，所以 $\omega_z=-\omega_{(t)}$，将 $z=-I\omega_{(t)}$，$M_z=k\omega_{(t)}$ 代入上式得：

$$-I\dot{\omega}_{(t)}=k\omega_{(t)}$$

又由于 $\dot{\omega}_{(0)}=\omega_0$，解得：$\omega_{(t)}=\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{I}t}$

故当 $\omega_{(t)}=\frac{\omega_0}{2}$ 时，$t=\frac{I}{k}\ln 2$

又由于 $\omega_{(t)}=\dot{\theta}_{(t)}$ （θ 为通风机转动的角度）

设 $\theta_{(0)}=0$

$$\dot{\theta}_{(t)}=\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{I}t}$$

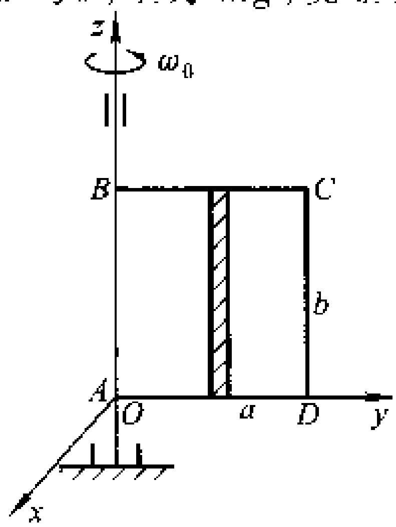
$$\theta_{(t)}=\int_0^t\omega_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{I}t}\mathrm{d}t+\theta_{(0)}=\frac{I\omega_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{I}t})$$

故当 $t=\frac{I}{k}\ln 2$ 时，$\theta_{(t)}=\frac{I\omega_0}{2k}$

t 时间内通风机转动的转数

$$n=\frac{\theta_{(t)}-\theta_{(0)}}{2\pi}=\frac{I\omega_0}{4\pi k}$$

3.12 矩形均质薄片 $ABCD$，边长为 a 与 b，重为 mg，绕竖直轴 AB 以初角速 ω_0 转动．此时薄片的每一部分均受到空气的阻力，其方向垂直于薄片的平面，其量值与面积及速度平方成正比，比例系数为 k．问经过多少时间后，薄片的角速减为初角速的一半？



题 3.12.1 图

解 如题 3.12.1 图，坐标 $Oxyz$ 与薄片固连，则沿 z 轴方向有：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=M_z$$

且 $$z=I\omega_z \quad ①$$

现取如图阴影部分的小区域 $dS = a dy$，该区域受到的阻力

$$df = k dS v^2 = ka dy(\omega_z y)^2$$

df 对 z 轴的力矩 $\quad dM_z = -df \cdot y = -ka\omega_z^2 y^3 dy$

所以 $\quad M_z = \int_0^a dM_z = -k\frac{a^3 b}{4}\omega_z^2 \qquad ②$

又薄片对 z 轴的转动惯量

$$I = \int_0^a y^2 dm = \int_0^a y^2 \rho b dy$$

$$= \frac{1}{3}ma^2 (m = \rho ab) \qquad ③$$

由①②③得： $\qquad \dot{\omega}_z = -\frac{3ka^2 b}{4m}\omega_z^2$

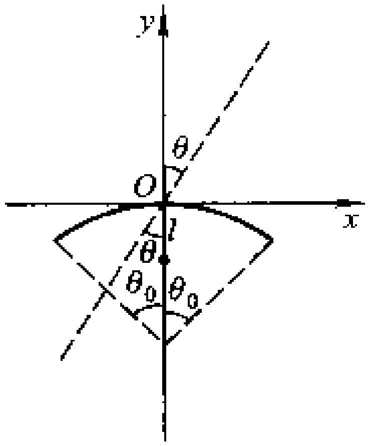
又 $\omega_{z(0)} = \omega_0$，解得：

$$\omega_{z(t)} = \frac{1}{\frac{3ka^2 b}{4m}t + \frac{1}{\omega_0}}$$

当 $\omega_{z(t)} = \frac{\omega_0}{2}$ 时，$t = \frac{4m}{3ka^2 b\omega_0}$

3.13 一段半径 R 为已知的均质圆弧，绕通过弧线中心并与弧面垂直的轴线摆动．求其作微振动时的周期．

解 如题 3.13.1 图所示，坐标系 $Oxyz$ 的原点位于圆弧最顶点．设圆弧平衡时，质心 c 的坐标为 $c(0, -l, 0)$．如图所示圆弧偏离平衡位置一小角度 θ，则 θ 满足微分方程



题 3.13.1 图

$$mgl\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

I 为圆弧相对于 Oz 轴的转动惯量．当 θ 很小时，$\sin\theta \approx \theta$，代入上式得：

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \qquad ①$$

圆弧上对应转角为 θ 的一小段圆弧的坐标为 $(R\sin\theta, R\cos\theta$

$-R,0)$

质心 c 的纵坐标

$$y_c = \frac{\int_{\theta_0}^{\theta_0}\rho\mathrm{d}\theta R(R\cos\theta - R)}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\rho R\mathrm{d}\theta} = \quad R + \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}R$$

上式中 ρ 为圆弧的线密度.

$$l = R - \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}R \qquad ②$$

又

$$I = \int_{-\theta_0}^{\theta_0}\rho R[(R\cos\theta - R)^2 + (R\sin\theta)^2]\mathrm{d}\theta$$

$$= 2mR^2\left(1 - \frac{\sin\theta_0}{\theta_0}\right) \qquad ③$$

其中 $\qquad m = 2\rho R\theta_0$

将②③代入①得 $\qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{2R}\theta = 0 \qquad ④$

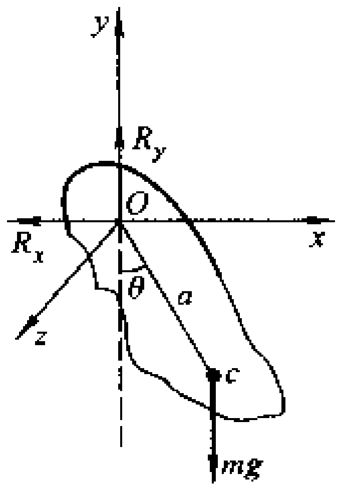
解④式得通解

$$\theta_{(t)} = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2R}}t + \varphi\right)$$

微振动的周期

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g/2R}} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

3.14 试求复摆悬点上的反作用力在水平方向的投影 R_x 与竖直方向的投影 R_y. 设此摆的重量为 mg，对转动轴的回转半径为 k，转动轴到摆重心的距离为 a，且摆无初速地自离平衡位置为一已知角 θ_0 处下降.



题 3.14.1 图

解 如题 3.14.1 图所示坐标系 $Oxyz$. 由动量定理及动量矩定理得：

$$m\ddot{x}_c = m(-x_c\dot{\theta}^2 - y_c\ddot{\theta}) = R_x \qquad ①$$

$$m\ddot{y}_c = m(-y_c\dot{\theta}^2 + x_c\ddot{\theta}) = R_y - mg \qquad ②$$

$$mk^2\ddot{\theta} = -mga\sin\theta \qquad ③$$

其中
$$x_c = a\sin\theta, y_c = -a\cos\theta$$

又根据机械能守恒定律得：

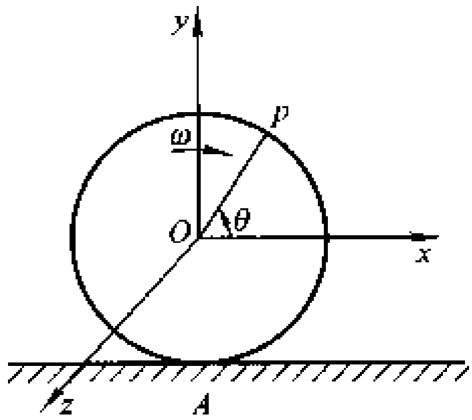
$$\frac{1}{2}mk^2\dot{\theta}^2 = mga(\cos\theta - \cos\theta_0) \qquad ④$$

由①②③④解得：

$$R_x = \frac{mga^2}{k^2}(2\cos\theta_0 + 3\cos\theta)\sin\theta$$

$$R_y = \frac{mga^2}{k^2}[(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\cos\theta - 1] + mg$$

3.15 一轮的半径为 r，以匀速 v_0 无滑动地沿一直线滚动．求轮缘上任一点的速度及加速度．又最高点及最低点的速度各等于多少？哪一点是转动瞬心？



题 3.15.1 图

解 如题 3.15.1 图所示坐标系 $Oxyz$．由于球作无滑滚动，球与地面的接触 A 的速度与地面一致，等于零，所以 A 点为转动瞬心．以 O 为基点．设球的角速度 $\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{OA} = v_0\boldsymbol{i} + (-\omega\boldsymbol{k})\times(-r\boldsymbol{j})$$
$$= (v_0 - \omega r)\boldsymbol{k} = 0$$

$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

设轮缘上任意一点 p，$\boldsymbol{Op}$ 与 x 轴交角为 θ，则

$$\boldsymbol{Op} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}$$

故
$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{Op} = v_0\boldsymbol{i} + (-\omega\boldsymbol{k})\times(r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j})$$
$$= (v_0 + \omega r\sin\theta)\boldsymbol{i} - \omega r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$
\begin{aligned}
v_p &= \sqrt{(v_0+\omega r\sin\theta)^2+(-\omega r\cos\theta)^2}\\
&=\sqrt{v_0^2+\omega^2 r^2+2v_0\omega r\sin\theta}\\
&=v_0\sqrt{2(1+\sin\theta)}
\end{aligned}
$$

当 $\theta=90^\circ$时，得最高点的速度 $v_{\rm top}=2v_0$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_p &= \boldsymbol{a}_0+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times \boldsymbol{Op}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times \boldsymbol{Op})\\
&=(-\omega \boldsymbol{k})\times[(-\omega \boldsymbol{k})\times(r\cos\theta \boldsymbol{i}+r\sin\theta \boldsymbol{j})]\\
&=-\omega^2 r\cos\theta \boldsymbol{i}-\omega^2 r\sin\theta \boldsymbol{j}=-\frac{v_0^2}{r}(\cos\theta \boldsymbol{i}+\sin\theta \boldsymbol{j})
\end{aligned}
$$

当 $\theta=90^\circ$和-90°时分别得到最高点和最低点的加速度

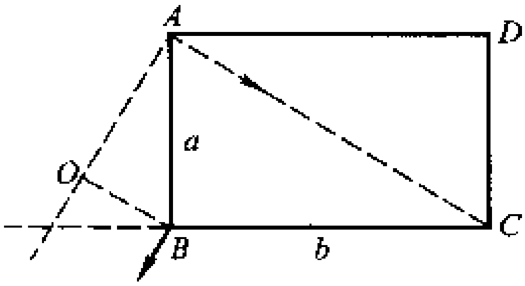
$$
\boldsymbol{a}_{\rm top}=-\frac{v_0^2}{r}\boldsymbol{j}
$$

$$
\boldsymbol{a}_{\rm bottom}=\frac{v_0^2}{r}\boldsymbol{j}
$$

3.16 一矩形板 $ABCD$ 在平行于自身的平面内运动，其角速度为定值 ω. 在某一瞬时，A 点的速度为 v，其方向则沿对角线 AC. 试求此瞬时 B 点的速度，以 v、ω 及矩形的边长等表示之. 假定$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$.

解 如题 3.16.1 图所示，由题意知该时刻瞬心一定处在 AC 的垂线 AO 中. 设瞬心为 O. 则

$$
OA=\frac{v}{\omega}
$$



题 3.16.1 图

易知 v_B 的方向如图，在$\triangle AOB$ 中.

$$
\begin{aligned}
OB^2 &= AO^2+AB^2-2AO\cdot AB\cos\angle OAB\\
&=\left(\frac{v}{\omega}\right)^2+a^2-2\frac{v}{\omega}a\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

$$
OB=\frac{1}{\omega}\sqrt{v^2+\omega^2a^2-2\omega v\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}
$$

故 $$v_B = \omega \cdot OB = \sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$\cos\angle OBA = \frac{BO^2 + BA^2 - AO^2}{2BO \cdot BA} = \frac{AB - AO\cos\angle OAB}{BO}$$

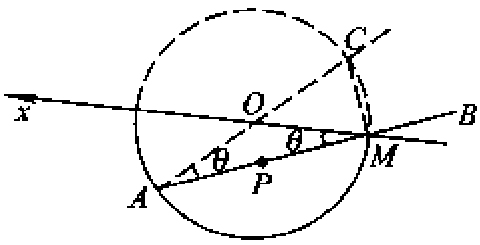
$$= \frac{\omega a - v\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}}$$

有 $$\angle OBA = \cos^{-1}\left[\frac{\omega a - v\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{v^2 + \omega^2 a^2 - 2\omega v \cdot \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}}\right]$$

$\angle OBA$ 即为 v_B 与 CB 边的夹角大小.

3.17 长为 l 的杆 AB 在一固定平面内运动. 其 A 端在半径 $r\left(r \leqslant \frac{l}{2}\right)$ 的圆周里滑动，而杆本身则于任何时刻均通过此圆周的 M 点. 试求杆上任一点的轨迹及转动瞬心的轨迹.

解 如题 3.17.1 图所示，M 点为极轴的原点，极轴过 O 点，所以在 AB 杆上任意一点 p. 设 $AP = a$. 设 p 的坐标为(ρ, θ)



题 3.17.1 图

因为 $$AM = 2r\cos\theta$$

所以 $$\rho = PM = AM - AP = 2r\cos\theta - a$$

再来求瞬心的轨迹. 由于 A 点速度沿弧面，M 点的速度沿 AB 杆. 现分别作 v_A 与 v_M 的垂线交于点 C，则 C 即为瞬心(见题 3.17.1 图).

当 A 点的极角为 θ 时，易知 C 点的极角 $\theta' = \theta - 90°$，故 C 点的极径 $\rho' = MC = AC \cdot \sin\theta$

易证明 $\triangle OCM$ 为等腰三角形. 有 $OC = OM = OA = r$

故 $$AC = AO + OC = 2r$$

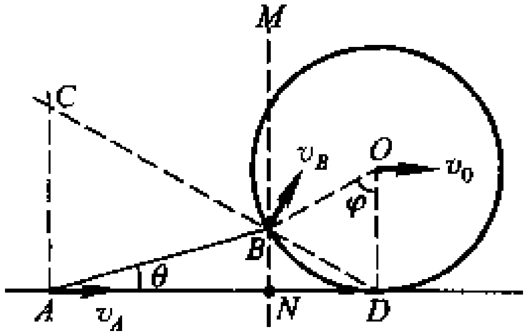
所以 $$\rho' = 2r\sin\theta = 2r\cos\theta'$$

又因为 $0 \leqslant \theta < 90^\circ$，所以 $-90^\circ \leqslant \theta' < 0$

所以 C 点轨迹是位于 x 轴上方，半径为 r 的半圆，如图虚线所示

3.18 一圆盘以匀速度 v_0 沿一直线无滑动地滚动. 杆 AB 以铰链固结于盘的边缘上的 B 点，其 A 端则沿上述直线滑动. 求 A 点的速度与盘的转角 φ 的关系，设杆长为 l，盘的半径为 r.

解 如题 3.18.1 图所示. 由于圆盘作无滑滚动，所以 D 为圆盘的瞬心



题 3.18.1 图

故 $v_B \perp DB$，设圆盘匀速转动的角速度为 ω，则

$$v_D = v_0 - \omega r = 0$$

得：$$\omega = \frac{v_0}{r}$$

所以 $$v_B = \omega \cdot DB = \omega \cdot 2r\sin\frac{\varphi}{2} = 2v_0\sin\frac{\varphi}{2} \quad ①$$

因为 A 点的速度沿地面水平向右，分别作 v_A 和 v_B 的垂线交于 C 点，则 C 点即为杆的瞬心. 且得：

$$v_A = v_B \cdot \frac{AC}{BC} = v_B \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle CAB}$$

由几何知识可知 v_B 与竖直方向夹角为 $\frac{\varphi}{2}$，$\angle MBC = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$

又知 $\angle ABN = 90^\circ - \theta$

$$\angle CBA = 180^\circ - \angle MBC - \angle ABN = \theta + \frac{\varphi}{2}$$

又 $\angle CAB = 90^\circ - \theta$，所以

$$v_A = v_B \frac{\sin\left(\theta + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\theta} = v_B\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{\varphi}{2}\right) \quad ②$$

又 $BN = AB\sin\theta = OD - OB\cos\varphi$. 即：$l\sin\theta = r - r\cos\varphi$

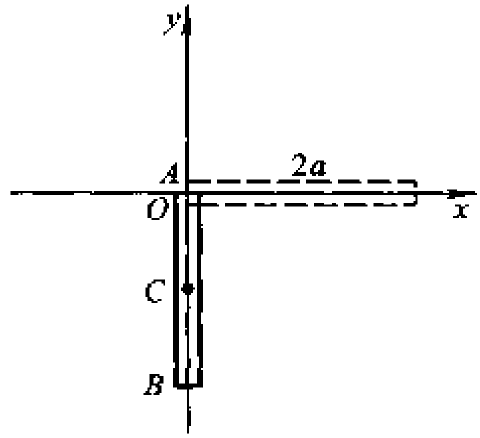
得 $$\sin\theta = \frac{r}{l}(1 - \cos\varphi) \quad ③$$

故 $$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{1}{l}\sqrt{l^2-4r^2\sin^4\frac{\varphi}{2}} \qquad ④$$

由①②③④解得：

$$v_A=2v_0\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{r\sin\varphi}{\sqrt{l^2-4r^2\sin^4\frac{\varphi}{2}}}+1\right)$$

3.19 长为$2a$的均质棒AB,以铰链悬挂于 A 点上.如起始时,棒自水平位置无初速地运动,并且当棒通过竖直位置时,铰链突然松脱,棒成为自由体.试证在以后的运动中,棒的质心的轨迹为一抛物线,并求当棒的质心下降 h 距离后,棒一共转了几转?



题 3.19.1 图

解 如题 3.19.1 图,固定坐标系 Oxy.杆从水平位置摆到竖直位置过程中只有重力做功,故机械能守恒.设此时杆的角速度为 ω_0,则

$$mga=\frac{1}{2}m(a\omega_0)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ma^2\right)\omega_0^2$$

右边第一项为质心运动动能,第二项为杆绕质心转动的动能.解上式得：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

在杆脱离悬点后,根据动量定理和动量矩定理：

$$m\ddot{x}_c=0 \qquad ①$$

$$m\ddot{y}_c=-mg \qquad ②$$

$$I\dot{\omega}_z=M_z \qquad ③$$

③式中 I 为杆绕质心的转动惯量,M_z 为沿过质心平行于 z 轴的轴的合力矩,易知 $M_z=0$,又 $\omega_{z(0)}=\omega_0$,代入③式得

$$\omega_{z(t)} = \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}}$$

即杆将作匀速转动.

又
$$\dot{x}_{c(0)} = -\omega_0 a = -\sqrt{\frac{3ga}{2}}, x_{c(0)} = 0$$
$$\dot{y}_{c(0)} = 0, y_{c(0)} = -a$$

解①②得：
$$x_c = \sqrt{\frac{3ga}{2}}t, y_c = -a - \frac{1}{2}gt^2 \quad ④$$

故
$$y_c = -\frac{1}{3a}x_c^2 - a$$

所以质心的轨迹为一抛物线.

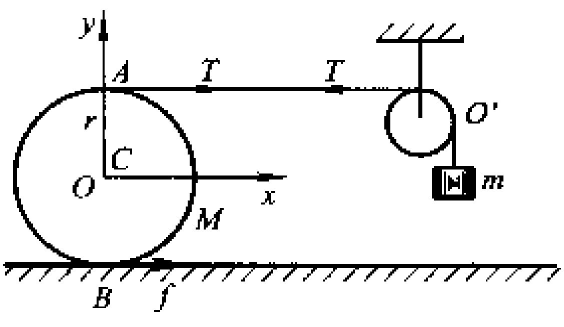
故当 $y_c = -a - h$ 时,杆的质心下降 h,代入④式得

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

故 t 时间内杆转动的转数

$$n = \frac{\omega_0 t}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2a}}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3h}{a}}$$

3.20 质量为 M、半径为 r 的均质圆柱体放在粗糙水平面上.柱的外面绕有轻绳,绳子跨过一个很轻的滑轮,并悬挂一质量为 m 的物体.设圆柱体只滚不滑,并且圆柱体与滑轮间的绳子是水平的.求圆柱体质心的加速度 a_1,物体的加速度 a_2 及绳中张力 T.



题 3.20.1 图

解 如题3.20.1图,设圆柱体的转动角速度为 $\boldsymbol{\omega} = -\omega\boldsymbol{k}$,设它受到地面的摩擦力为 f,由动量定理和动量矩定理知：

$$\sum F_x = -T + f = M\ddot{x}_c = Ma_1 \quad ①$$

$$\sum M_z = -Tr + fr = -\frac{1}{2}Mr^2\dot{\omega} \quad ②$$

对于滑块,由动量定理知:

$$\sum F_y = T - mg = m\ddot{y} = -ma_2 \quad ③$$

又由无滑滚动条件知:

$$\dot{x}_c = r\omega$$

两边对时间求导得:

$$a_1 = \ddot{x}_c = r\dot{\omega} \quad ④$$

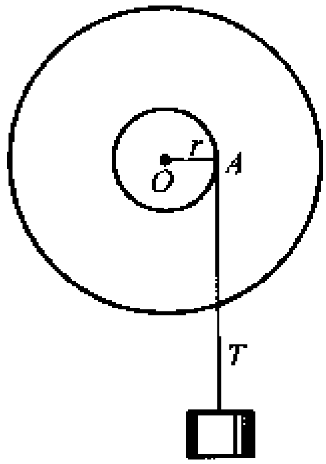
以 C 为基点: $a_{Ax} = a_1 + \dot{\omega}r$

假设绳不可拉伸,则 $a_{Ax} = a_2$,故 $a_2 = a_1 + \dot{\omega}r$ ⑤

由①②③④⑤解得:

$$a_1 = \frac{4mg}{3M+8m}, a_2 = \frac{8mg}{3M+8m}, T = \frac{3mMg}{3M+8m}$$

3.21 一飞轮有一半径为 r 的杆轴,飞轮及杆轴对于转动轴的总转动惯量为 I. 在杆轴上绕有细而轻的绳子,绳子的另一端挂一质量为 m 的重物. 如飞轮受到阻尼力矩 G 的作用,求飞轮的角加速度. 若飞轮转过 θ 角后,绳子与杆轴脱离,并再转过 φ 角后,飞轮停止转动,求飞轮所受到的阻尼力矩 G 的量值.



题 3.21.1 图

解 (1) 如题 3.21.1 图,设 z 轴过 O 点垂直纸面向外. 绳子上的弹力为 T. 对于飞轮,根据动量矩定理,在 z 轴方向:

$$\sum M_z = Tr - G = I\dot{\omega} \quad ①$$

对于物块,根据角动量定理,在竖直方向有:

$$mg - T = ma \quad ②$$

a 为物块下落的加速度. 因为物块的加速度应与 A 点加速度一样

大小，故

$$a = \dot{\omega} r \tag{③}$$

由①②③解得：$$\dot{\omega} = \frac{mgr - G}{I + mr^2}$$

(2) 假若飞轮受到的阻尼力矩为 G 的话，由(1)问知，飞轮的角加速度 $\dot{\omega} = \frac{mgr - G}{I + mr^2}$. 现在来求绳子脱落以后飞轮的角加速度 $\dot{\omega}'$.

同样根据动量矩定理，在 z 轴方向：

$$I\dot{\omega}' = -G$$

$$\dot{\omega}' = -\frac{G}{I}$$

可以证明：类似于位移、加速度、初速度和末速度之间的关系式 $v_t^2 - v_0^2 = 2as$，角位移、角加速度、角初速度、角末速度之间也有类似的关系：

$$\dot{\theta}_t^2 - \dot{\theta}_0^2 = 2\ddot{\theta}\theta$$

对于开始转动到绳子脱落的这段过程有：

$$\dot{\theta}_t^2 = 2\dot{\omega}\theta = 2\frac{mgr - G}{I + mr^2}\theta \tag{③}$$

对于绳子脱落到停止转动的过程有：

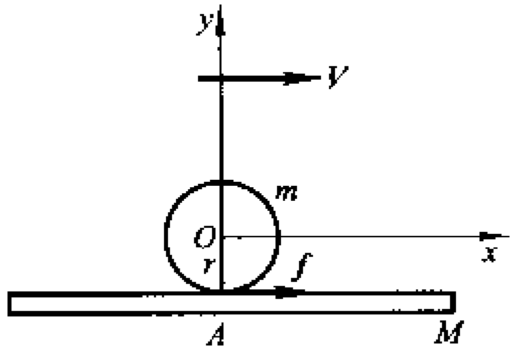
$$0 - \dot{\theta}_t^2 = 2\dot{\omega}'\varphi = 2\left(-\frac{G}{I}\right)\varphi \tag{④}$$

③④式中 $\dot{\theta}_t$ 指绳子脱落时飞轮的角速度，由③④解得：

$$G = \frac{mgIr\theta}{I\theta + (I + mr^2)\varphi}$$

3.22 一面粗糙另一面光滑的平板，质量为 M，将光滑的一面放在水平桌上，木板上放一质量为 m 的球. 若板沿其长度方向突然有一速度 V，问此球经过多少时间后开始滚动而不滑动？

解 如题3.22.1图，Ox 轴与速度方向一致，Oz 轴垂直纸面向外。设球的半径为 r，则球绕任一直径的转动惯量 $I=\frac{2}{5}mr^2$。由动量定理和动量矩定理可知：



题 3.22.1 图

对小球： $m\ddot{x}_c=\mu N$ ①

$m\ddot{y}_c=N-mg=0$ ②

$I\dot{\omega}=\mu Nr$ ③

对木板： $M\ddot{x}_c'=-\mu N$ ④

由①②③①得：$\ddot{x}_c=\mu g$，$\dot{\omega}=\frac{5\mu g}{2r}$，$\ddot{x}_c'=-\frac{\mu mg}{M}$

设球与板的接触点为 A，则 t 时刻 A 点的速度为：

$$v_A=v_0+\omega r=\ddot{x}_c t+\dot{\omega}tr=\mu gt+\frac{5\mu g}{2r}tr \qquad ⑤$$

t 时刻木板的速度 $v'=V+\ddot{x}_c't=V-\frac{\mu mg}{M}t$ ⑥

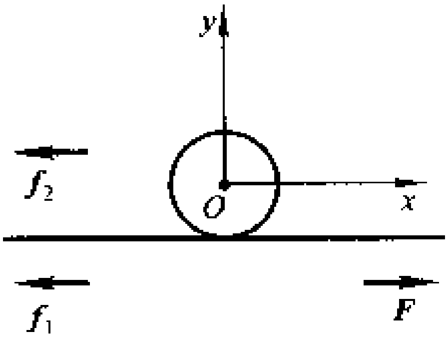
球由滑动变为滚动的条件是： $v_A=v'$ ⑦

由⑤⑥⑦解得：

$$t=\frac{V}{\left(\frac{7}{2}+\frac{m}{M}\right)\mu g}$$

3.23 重为 W_1 的木板受水平力 F 的作用，在一不光滑的平面上运动，板与平面间的摩擦数为 μ。在板上放一重为 W_2 的实心圆柱，此圆柱在板上滚动而不滑动，试求木板的加速度 a。

解 如题 3.23.1 图所示。设圆柱的半径为 r，与木板之间的摩擦力为 f_2，弹力为 N_1，木板受地面的摩擦力为 f_1，弹力为 N_2，对木板由动量定理得：



题 3.23.1 图

$$F-f_1-f_2=\frac{W_1}{g}a \qquad ①$$

$$N_2-W_1-N_1=0 \qquad ②$$

对圆柱，由角动量定理和动量定理得：

$$\frac{W_2}{g}\ddot{x}_c = f_2 \qquad ③$$

$$\frac{W_2}{g}\ddot{y}_c = N_1 - W_2 = 0 \qquad ④$$

$$I\dot{\omega} = f_2 r \qquad ⑤$$

其中 I 为圆柱绕中心轴的转动惯量，所以

$$I = \frac{1}{2}\frac{W_2}{g}r^2 \qquad ⑥$$

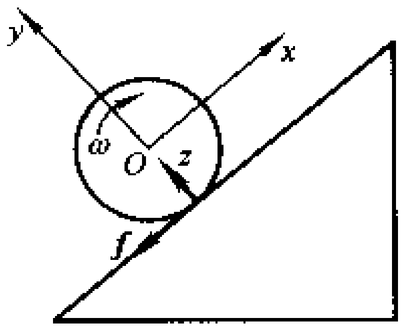
又 $$f_1 = \mu N_2 \qquad ⑦$$

无滑滚动的条件： $$\ddot{x}_c + \dot{\omega}r = a \qquad ⑧$$

由①～⑧式解得： $$a = \frac{F - \mu(W_1 + W_2)}{W_1 + \frac{W_2}{3}}g$$

3.24 半径为 a 的球，以初速 V 及初角速 ω 抛掷于一倾角为 α 的斜面上，使其沿着斜面向上滚动，如 $V > a\omega$，其中 ω 的方向使球有向下滚动的趋向，且摩擦系数 $\mu > \frac{2}{7}\tan\alpha$，试证经过 $\frac{5V + 2a\omega}{5g\sin\alpha}$ 的时候，球将停止上升.

解 如题 3.24.1 图，$Oxyz$ 坐标不与圆柱固连，是固定坐标系. 由于 $v > \omega a$，所以圆柱与斜面接触的边缘有相对于斜面向上的运动趋势，所以斜面对圆柱的摩擦力沿斜面向下.



题 3.24.1 图

对圆柱：

x 轴方向 $$m\dot{v}_c = -f - mg\sin\alpha \qquad ①$$

y 轴方向 $$0 = N - mg\cos\alpha \qquad ②$$

z 轴方向 $$-\frac{2}{5}ma^2\dot{\omega} = -fa \qquad ③$$

又 $$f = \mu N \qquad ④$$

由①②③④式得： $$m\frac{dv}{dt} = -\frac{2}{5}ma\frac{d\omega}{dt} - mg\sin\alpha$$

设从 0 到 t 的过程中,圆柱的速度从 V 变到 0,角速度从 ω 变到 0,所以

$$\int_V^0 \mathrm{d}v = \int_\omega^0 \frac{2}{5}a\,\mathrm{d}\omega - \int_0^t g\sin\alpha\,\mathrm{d}t$$

即

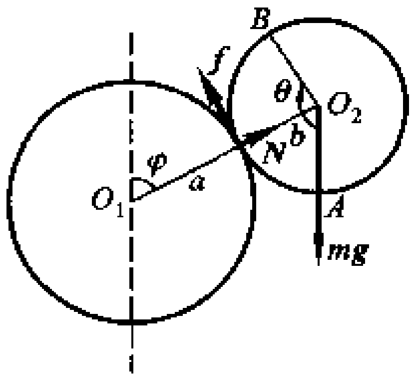
$$-V = \frac{2}{5}a\omega - g\sin\alpha t$$

$$t = \frac{5V + 2a\omega}{5g\sin\alpha}$$

3.25 均质实心圆球,栖于另一固定圆球的顶端.如使其自此位置发生此微偏离,则将开始滚下.试证当两球的公共法线与竖直线所成之角 φ 满足下列关系

$$2\sin(\varphi - \lambda) = 5\sin\lambda(3\cos\varphi - 2)$$

时,则将开始滑动,式中 λ 为摩擦角.



题 3.25.1 图

证 如题 3.25.1 图.设大球和小球的半径分别为 a, b. O_1, O_2 分别为大球和小球的球心. O_2A 为方向竖直向下的定线, O_2B 为小球上的一动线.当小球位于大球顶端时, O_2A 与 O_2B 重合.设 $\angle AO_2B = \theta$, O_1O_2 与竖直方向的夹角为 φ,根据无滑条件:

$$a\varphi = (\theta - \varphi)b. \quad ①$$

对于小球,有如下运动微分方程:

切向: $$mg\sin\varphi - f = m(a+b)\ddot{\varphi} \quad ②$$

法向: $$mg\cos\varphi - N = m(a+b)\dot{\varphi}^2 \quad ③$$

又由摩擦角的定义知: $$f = N\tan\lambda \quad ④$$

转动方向: $$fb = \frac{2}{5}mb^2\ddot{\theta} \quad ⑤$$

从最高点运动到图示位置过程中,机械能守恒,即

$$mg(a+b)(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}m[(a+b)\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mb^2\dot{\theta}^2 \quad ⑥$$

由①得 $$\dot{\theta} = \frac{a+b}{b}\dot{\varphi}, \ddot{\theta} = \frac{a+b}{b}\ddot{\varphi} \quad ⑦$$

由①～⑦解得

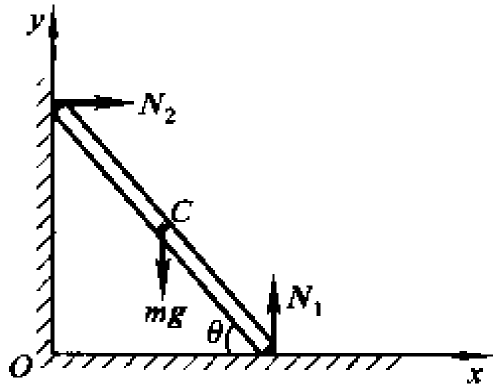
$$2\sin(\varphi-\lambda)=5\sin\lambda(3\cos\varphi-2)$$

3.26 棒的一端置于光滑水平面上，另一端则靠在光滑墙上，且棒与地面的倾角为 α. 如任其自此位置开始下滑，则当棒与地面的倾角变为

$$\arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$$

时，棒将与墙分离，试证明之.

解 如题 3.26.1 图所示坐标系 $Oxyz$. 设杆的长度为 $2a$，质量为 m. 受到墙和地面的作用力分别为 N_2、N_1，当杆与地面的倾角为 θ 时，质心 C 的坐标为：



题 3.26.1 图

$$x_c=a\cos\theta$$

$$y_c=a\sin\theta$$

对上两式求时间导数，得质心的速度和加速度：

$$\begin{cases}\dot{x}_c=-a\sin\theta\dot{\theta}\\ \dot{y}_c=a\cos\theta\dot{\theta}\end{cases}\qquad\begin{cases}\ddot{x}_c=-a\cos\theta\dot{\theta}^2-a\sin\theta\ddot{\theta}\\ \ddot{y}_c=-a\sin\theta\dot{\theta}^2+a\cos\theta\ddot{\theta}\end{cases}\qquad ①$$

有

$$v_c=\sqrt{\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2}=a\dot{\theta}\qquad ②$$

又根据机械能守恒得：

$$mga(\sin\alpha-\sin\theta)=\frac{1}{2}mv_c^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2\qquad ③$$

其中 I 为杆绕质心的转动惯量

$$I=\frac{1}{3}ma^2\qquad ④$$

由②③④得

$$\dot{\theta}^2=\frac{3g}{2a}(\sin\alpha-\sin\theta)\qquad ⑤$$

对⑤式求时间导数得

$$\ddot{\theta}=-\frac{3g}{4a}\cos\theta\qquad ⑥$$

又由动量定理 $N_2 = m\ddot{x}_c$ ⑦

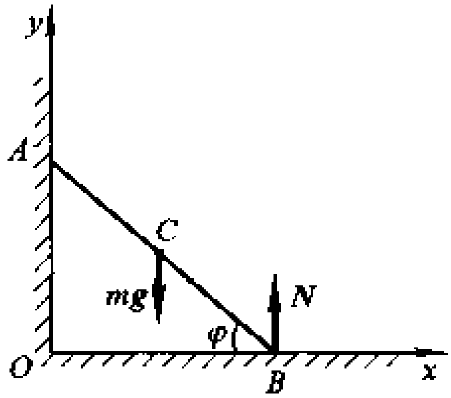
当杆脱离墙时,有 $N_2 = 0$ ⑧

由①⑤⑥⑦⑧得 $3\sin\theta = 2\sin\alpha$ ⑨

所以 $\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right)$

3.27 试研究上题中棒与墙分离后的运动. 并求棒落地时的角速度 Ω,设棒长为 $2a$.

解 如题3.27.1图,设 φ 为杆与地面的倾角,θ 为杆脱离墙时的 φ 值. 设杆脱离墙时,杆的角速度为 ω,横纵速度分别为 $\dot{x}_c, \dot{y}_c$,当杆落地时,质心 C 的横纵速度分别为 $\dot{x}'_c, \dot{y}'_c$,杆的角速度为 ω'. 当 φ 由 θ 变为0的过程中,机械能守恒:



题3.27.1图

$$mga(\sin\theta - \sin 0) = \frac{1}{2}m[(\dot{x}'^2_c + \dot{y}'^2_c) - (\dot{x}^2_c + \dot{y}^2_c)] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2[\omega'^2 - \omega^2] \quad ①$$

又因为此过程中杆已离开墙,所以杆在水平方向受力为零,故质心水平方向匀速,即

$$\dot{x}'_c = \dot{x}_c \quad ②$$

又 B 点只有水平方向的速度,根据 $\boldsymbol{V}_C = \boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{BC}$,知当杆落地时,$\dot{y}'_c$ 与 ω' 有如下关系:

$$\dot{y}'_c = -\omega'_a \quad ③$$

且由3.26题式①得:

$$\dot{y}_c = a\cos\theta\dot{\theta} = a\cos\theta\omega \quad ④$$

将②③④代入①得:

$$g\sin\theta = \frac{2}{3}a\omega'^2 \quad \frac{1}{2}a\left(\frac{1}{3} + \cos^2\theta\right)\omega^2 \quad ⑤$$

由3.26题式⑤⑨得

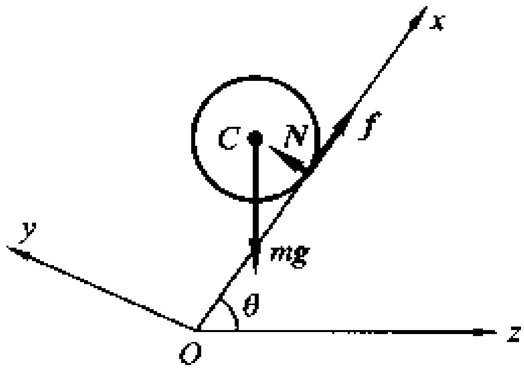
$$\omega^2 = \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a}(\sin\alpha - \sin\theta) \tag{⑥}$$

$$\sin\theta = \frac{2}{3}\sin\alpha \tag{⑦}$$

将⑥⑦代入⑤得 $\omega'^2 = \frac{3g\sin\alpha}{2a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\alpha\right)$

即 $$\omega' = \left[\frac{3g\sin\alpha}{2a}\left(1 - \frac{1}{9}\sin^2\alpha\right)\right]^{1/2}$$

3.28 半径为 r 的均质实心圆柱，放在倾角为 θ 的粗糙斜面上，摩擦系数为 μ. 设运动不是纯滚动，试求圆柱体质心加速度 a 及圆柱体的角加速度 α.



题 3.28.1 图

解 如题 3.28.1 图. 对圆柱有如下基本运动微分方程：

x 方向：$m\ddot{x}_c = f - mg\sin\theta$
$= -ma$ ①

y 方向：$m\ddot{y}_c = N - mg\cos\theta$
$= 0$ ②

z 方向：$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\omega} = f \cdot r \tag{③}$$

又由于 $$f = \mu N \tag{④}$$

且 $$\mu = \tan\lambda \tag{⑤}$$

由①②③④得 $$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) \tag{⑥}$$

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{2\mu\cos\theta}{r}g$$

将⑤代入⑥得 $$a = \frac{\sin(\theta - \lambda)}{\cos\lambda}g$$

3.29 均质实心圆球和一外形相等的空心球壳沿着一斜面同时自同一高度自由滚下，问哪一个球滚得快些？并证它们经过相等距离所需的时间比是 $\sqrt{21}:5$.

解 如题 3.29.1 图.设斜面的倾角为 θ,实心球或球壳的质量为 m,半径为 r,转动惯量为 I,则可列出下列方程:

x 轴: $mg\sin\theta - f = ma_c$ ①

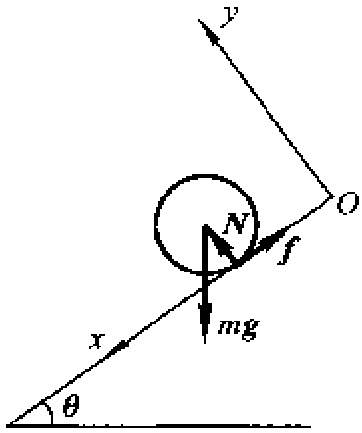
z 轴: $f \cdot r = I\dot{\omega}$ ②

又由无滑滚动条件

$$a_c - r\dot{\omega} = 0 \quad ③$$

由①②③式得

$$a_c = \frac{mg\sin\theta}{m + \frac{I}{r^2}} \quad ④$$



题 3.29.1 图

对于实心均匀球: $I_{实} = \frac{2}{5}mr^2$ ⑤

对于空心球壳:

$$I_{空} = \int(x^2 + y^2)\rho \mathrm{d}s = \int(r^2 - r\cos\varphi)\rho^2 r^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}mr^2 \quad ⑥$$

将⑤⑥代入④得: $\frac{a_{c实}}{a_{c空}} = \frac{25}{21}$ ⑦

对于初速为 0 的匀加速运动,时间、加速度、位移有以下关系:

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} \quad ⑧$$

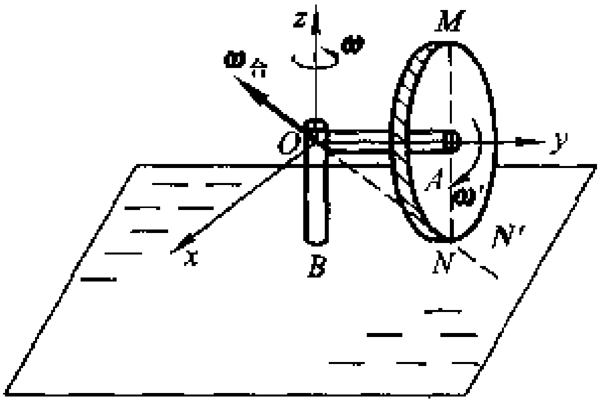
当 $s_{空} = s_{实}$ 时,将⑦代入⑧得:

$$\frac{t_{空}}{t_{实}} = \frac{5}{\sqrt{21}}.$$

故实心球滚得快些.

3.30 碾磨机碾轮的边缘沿水平面作纯滚动,轮的水平轴则以匀角速 ω 绕铅垂轴 OB 转动.如 $OA = c$,$OB = b$,试求轮上最高点 M 的速度及加速度的量值.

解　如题3.30.1图以 OA 为 y 轴. OB 为 z 轴. 建立与碾轮一起转动的动坐标系 $Oxyz$，设碾轮绕 Oy 轴转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}' = -\omega'\boldsymbol{j}$，水平轴的转动角速度为 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$，所以 M 点的合角速度为



题 3.30.1 图

$$\boldsymbol{\omega}_{合} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}' = -\omega'\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}$$

又因为 O 点和 N 点的速度为 0，所以 ON 即为瞬时轴. 设 ON 与地面成 θ 夹角，由于 $\boldsymbol{\omega}_{合}$ 沿瞬时轴方向，所以：

$$\frac{\omega}{\omega'} = \tan\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{c}，得：\omega' = \frac{c}{b}\omega$$

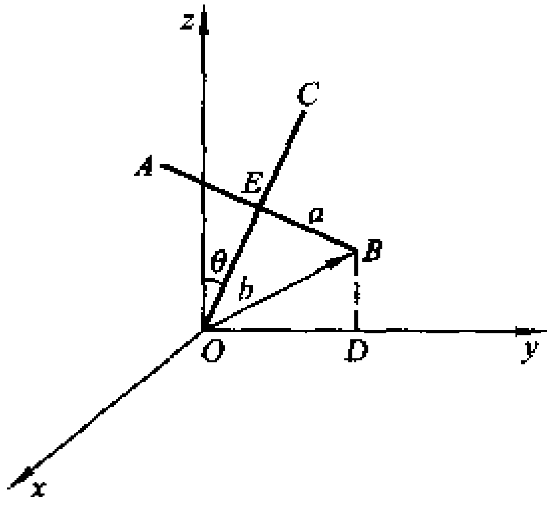
故 $$\boldsymbol{V}_M = \boldsymbol{\omega}_{合} \times \boldsymbol{OM} = \left[\left(-\frac{c}{b}\omega\right)\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}\right] \times (c\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k})$$
$$= -2\omega c\boldsymbol{i}$$

$$V_M = 2\omega c$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_M &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{合}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{\omega}_{合} \times (\boldsymbol{\omega}_{合} \times \boldsymbol{OM}) \\ &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_{合}) \times \boldsymbol{OM} + \boldsymbol{\omega}_{合} \times (\boldsymbol{\omega}_{合} \times \boldsymbol{OM}) \\ &= [\omega\boldsymbol{k} \times (-\omega'\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k})] \times (c\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}) + [-\omega'\boldsymbol{j} + \omega\boldsymbol{k}] \times (-2\omega c\boldsymbol{i}) \\ &= -3\omega^2 c\boldsymbol{j} - \frac{c}{b}\omega^2 c\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

故 $$a_M = \omega^2 c\sqrt{9 + \left(\frac{c}{b}\right)^2}$$

3.31　转轮 AB，绕 OC 轴转动的角速度为 ω_1，而 OC 绕竖直线 OE 转动的角速度则为 ω_2. 如 $\overline{AD} = \overline{DB} = a$，$\overline{OD} = b$，$\angle COE = \theta$，试求转轮最低点 B 的速度.



题 3.31.1 图

解　如题 3.31.1 图所示，

$Oxyz$ 为转轮固连的转动坐标系，且 OC 在平面 Oyz 内，z 轴沿竖直方向，所以 OC 轴转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}_2=\omega_2\boldsymbol{k}$，转轮 AB 绕 OC 轴转动的角速度 $\boldsymbol{\omega}_1=\omega_1\sin\theta\boldsymbol{j}+\omega_1\cos\theta\boldsymbol{k}$，故转轮的合角速度：

$$\boldsymbol{\omega}_{合}=\boldsymbol{\omega}_1+\boldsymbol{\omega}_2=\omega_1\sin\theta\boldsymbol{j}+(\omega_2+\omega_1\cos\theta)\boldsymbol{k}$$

在直角△OEB 中，$EB=a$，$EO=b$，$\angle EOB=\varphi$，所以

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},OB=\sqrt{a^2+b^2}$$

在直角△ODB 中，

$$\begin{aligned}BD&=OB\cos\angle OBD=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\varphi)\\&=b\cos\theta-a\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}OD&=OB\sin\angle OBD=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)\\&=b\sin\theta+a\cos\theta\end{aligned}$$

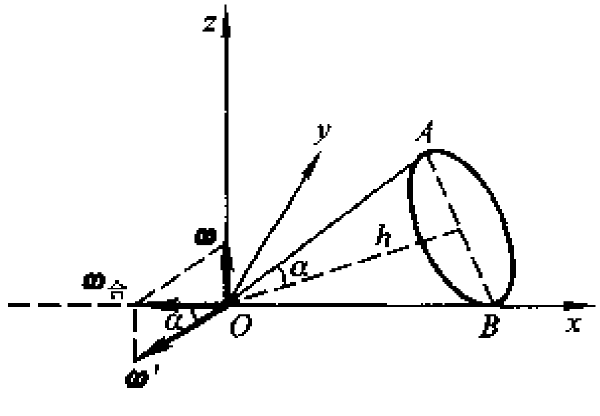
故 $\boldsymbol{OB}=(b\sin\theta+a\cos\theta)\boldsymbol{j}+(b\cos\theta-a\sin\theta)\boldsymbol{k}$

O 为定点转动的定点.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_B&=\boldsymbol{\omega}_{合}\times\boldsymbol{OB}\\&=[\omega_1\sin\theta\boldsymbol{j}+(\omega_2+\omega_1\cos\theta)\boldsymbol{k}]\times\\&\quad[(b\sin\theta+a\cos\theta)\boldsymbol{j}+(b\cos\theta-a\sin\theta)\boldsymbol{k}]\\&=-[\omega_1a+\omega_2(a\cos\theta+b\sin\theta)]\boldsymbol{i}\end{aligned}$$

故转轮最低点 B 的速度 $V_B=\omega_1a+\omega_2(a\cos\theta+b\sin\theta)$，方向垂直纸面朝外.

3.32 高为 h、顶角为 2α 的圆锥在一平面上滚动而不滑动. 如已知此锥以匀角速 ω 绕 $O\zeta$ 轴转动，试求圆锥底面上 A 点的转动加速度 a_1 和向轴加速度 a_2 的量值.



题 3.32.1 图

解 如题 3.32.1 图所示，$Oxyz$ 坐标系随圆锥一起转动. Ox 轴过圆锥与地面的

接触线 OB. 设圆锥绕自己的轴线转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega}'$. 又圆锥的轴线绕 z 轴转动的角速度为 $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{k}$，所以合角速度：

$$\boldsymbol{\omega}_{合} = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}'$$

由于 OB 是瞬时轴，故 $\boldsymbol{\omega}_{合}$ 沿 Ox 轴. 由图可知：

$$\sin\alpha = \frac{\omega}{\omega'}，即\ \omega' = \frac{\omega}{\sin\alpha}$$

故
$$\boldsymbol{\omega}_{合} = -\omega\cot\alpha\boldsymbol{i}$$

又 A 点的位置矢量可以表示为

$$\boldsymbol{OA} = OA\sin2\alpha\boldsymbol{k} + OA\cos2\alpha\boldsymbol{i} = \frac{h}{\cos\alpha}(\cos2\alpha\boldsymbol{i} + \sin2\alpha\boldsymbol{k})$$

所以 A 点转动角速度

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{合}}{\mathrm{d}t}\times \boldsymbol{OA} = (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}_{合})\times \boldsymbol{OA}$$

$$= [\omega\boldsymbol{k}\times(-\omega\cot\alpha)\boldsymbol{i}]\times\frac{h}{\cos\alpha}(\cos2\alpha\boldsymbol{i} + \sin2\alpha\boldsymbol{k})$$

$$= \frac{\omega^2 h}{\sin\alpha}(\ \ \sin2\alpha\boldsymbol{i} + \cos2\alpha\boldsymbol{k})$$

向轴加速度

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\omega}_{合}\times(\boldsymbol{\omega}_{合}\times\boldsymbol{OA}) = (\ \ \omega\cot\alpha\boldsymbol{i})\times[(-\omega\cot\alpha\boldsymbol{i})\times \frac{h}{\cos\alpha}(\cos2\alpha\boldsymbol{i} + \sin2\alpha\boldsymbol{k})]$$

$$= \ \ \frac{2\omega^2 h}{\sin\alpha}\cos^2\alpha\boldsymbol{k}$$

故
$$a_1 = \frac{\omega^2 h}{\sin\alpha}，a_2 = \frac{2\omega^2 h}{\sin\alpha}\cos^2\alpha$$

3.33 一回转仪，$I_1 = I_2 = 2I_3$，依惯性绕重心转动，并作规则进动. 已知此回转仪的自转角速度为 ω_1，并知其自转轴与进动轴间的夹角 $\theta = 60°$，求近动角速度 ω_2 的量值.

解 由于回转仪绕质心转动，故 $M_x = M_y = M_z = 0$，将其代入欧勒动力学方程得：

$$I_1\dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z = M_x = 0$$

$$I_2\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=M_y=0$$

$$I_3\dot{\omega}_z-(I_1-I_2)\omega_x\omega_y=M_z=0$$

又由于 $I_1=I_2=2I_3$，故有：

$$I_1\dot{\omega}_x-\frac{I_1}{2}\omega_y\omega_z=0$$

$$I_1\dot{\omega}_y+\frac{I_1}{2}\omega_z\omega_x=0 \qquad ①$$

$$\frac{I_1}{2}\dot{\omega}_z=0$$

又有欧勒运动学方程：

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi+\dot{\theta}\cos\psi$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi-\dot{\theta}\sin\psi$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi}$$

因为 $\theta=60°$，故 $\dot{\theta}=0$，故：

$$\omega_x=\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi \qquad ②$$

$$\omega_y=\dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi \qquad ③$$

$$\omega_z=\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi} \qquad ④$$

由于是规则进动，故 $\ddot{\varphi}=0$，故对③式求导得：

$$\dot{\omega}_y=-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\dot{\psi} \qquad ⑤$$

将②④⑤式代入①式得：

$$-\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi\dot{\psi}+\frac{1}{2}(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})(\dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi)=0$$

化简得
$$\dot{\varphi}\cos\theta=\dot{\psi}$$

由于 $\theta=60°,\cos\theta=\frac{1}{2}$，故 $\dot{\varphi}=2\dot{\psi}$，即 $\omega_2=2\omega_1$

3.34 试用欧勒动力学方程，证明在欧勒－潘索情况中，动量矩 J 及动能 T 都是常数.

解 在欧勒－潘索情况下，刚体绕质心的合力矩 $\boldsymbol{M}=0$，质心又是固定点. 设 $\boldsymbol{J}$ 为刚体绕固定点的动量矩，则由动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M}=0$$

故 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_c$ 是常量

将 $\boldsymbol{M}=0$ 代入欧勒动力学方程得：

$$I_1\dot{\omega}_x-(I_2-I_3)\omega_y\omega_z=M_x=0 \quad ①$$

$$I_2\dot{\omega}_y-(I_3-I_1)\omega_z\omega_x=M_y=0 \quad ②$$

$$I_3\dot{\omega}_z-(I_1-I_2)\omega_x\omega_y=M_z=0 \quad ③$$

将① $\times\ \omega_x$ + ② $\times\ \omega_y$ + ③ $\times\ \omega_z$ 得：

$$I_1\omega_x\dot{\omega}_x+I_2\omega_y\dot{\omega}_y+I_3\omega_z\dot{\omega}_z=0$$

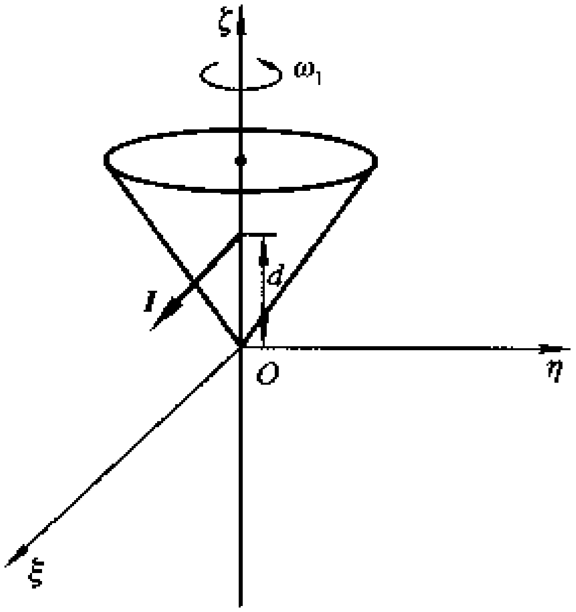
即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}I_1\omega_x^2+\frac{1}{2}I_2\omega_y^2+\frac{1}{2}I_3\omega_z^2\right]=0$$

又由于
$$T=\frac{1}{2}I_1\omega_x^2+\frac{1}{2}I_2\omega_y^2+\frac{1}{2}I_3\omega_z^2.$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=0$$

即 $T=c$ 是常量.

3.35 对称陀螺的轴位于竖直位置，陀螺以很大的角速度 ω_1 作稳定的自转. 今突然在离开顶点 d 处受到一与陀螺的对称轴垂直的冲量 I 作用. 试证陀螺在以后的运动中，最大章动角近似为 $2\arctan\left(\frac{Id}{I_3\omega_1}\right)$，式中 I_3 是陀螺绕对称轴转动的转动惯量.



题 3.35.1 图

解 当陀螺以高速绕 ζ 轴旋转时，冲量作用于 O 点上方 d 处，由于作用时间极短，陀螺的位置来不及改变. 但是将会获得一个绕 η 轴旋转的章动角速度记为 ω'，则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{M} \quad ①$$

方向沿 η 轴正向,因此

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=Fd$$

$$\mathrm{d}J=Fd\cdot\mathrm{d}t=F\mathrm{d}t\cdot d$$

$$\Delta J=Id=I_1\omega'$$

其中 I_1 为陀螺对 η 轴的转动惯量,所以

$$\omega'=\frac{Id}{I_1} \quad ②$$

由教科书中(3.9.23)式可得

$$\dot{x}^2=f(x)=\frac{1}{I_1}\left(2E-\frac{\beta^2}{I_3}-2mglx\right)(1-x^2)-\frac{(\alpha-\beta x)^2}{I_1^2} \quad ③$$

其中 $x=\cos\theta$,θ 为章动角.

当章动为最大值时,$\dot{x}=0$,即 $f(x)=0$

由初值条件

$$\beta=I_3S=I_3\omega_1,\alpha=I_3\omega_1 \quad ④$$

再由教材(3.9.20)知

$$E=\frac{1}{2}I_1\omega'^2+\frac{1}{2}I_3\omega_1{}^2+mg \quad ⑤$$

把④⑤代入到 $f(x)=0$,同时考虑到 $2mglx\approx2mgl$.

得 $$\frac{1}{I_1}(I_1\omega'^2+I_3\omega_1^2-I_3\omega_1^2)(1-x^2)=\frac{I_3^2\omega_1^2}{I_1^2}(1-x)^2$$

故 $$(I_1\omega')^2=(I_3\omega_1)^2\frac{(1-x)^2}{1-x^2}$$

得 $$\frac{1-x}{1+x}=\frac{I_1\omega'}{I_3\omega_1}=\frac{Id}{I_3\omega_1}$$

又因为 $x=\cos\theta$,所以 $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^2\frac{\theta}{2}$

即 $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{Id}{I_3\omega_1}$

得 $\theta = 2\arctan\dfrac{Id}{I_3\omega_1}$

3.36 一个 $I_1 = I_2 \neq I_3$ 的刚体，绕其重心作定点转动. 已知作用在刚体上的阻尼力是一力偶，位于与转动瞬轴相垂直的平面内，其力偶矩与瞬时角速度成正比，比例常数为 $I_3\lambda$，试证刚体的瞬时角速度在三惯量主轴上的分量为

$$\omega_x = a\mathrm{e}^{-\lambda t I_3/I_1}\sin\left(\frac{n}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

$$\omega_y = a\mathrm{e}^{-\lambda t I_3/I_1}\cos\left(\frac{n}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

$$\omega_z = \Omega\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

式中 a, ε, Ω 都是常数，而 $n = \dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega$.

解 已知力偶矩 $\boldsymbol{M}$ 与瞬时角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 成正比，比例常数为 $I_3\lambda$，即

$$\boldsymbol{M} = -I_3\lambda\boldsymbol{\omega} = -I_3\lambda(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k})$$

又由欧勒动力学方程得

$$I_1\dot{\omega}_x - (I_2 - I_3)\omega_y\omega_z = M_x = -I_3\lambda\omega_x \qquad ①$$

$$I_2\dot{\omega}_y - (I_3 - I_1)\omega_z\omega_x = M_y = -I_3\lambda\omega_y \qquad ②$$

$$I_3\dot{\omega}_z = M_z = -I_3\lambda\omega_z \qquad ③$$

解③得 $\qquad \omega_z = \Omega\mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad$ （Ω 为常数） ④

设 $n = \dfrac{I_3 - I_1}{I_1}\Omega$，且知 $I_1 = I_2 \neq I_3$，将此二式及④式代入①②得

$$\dot{\omega}_x + n\mathrm{e}^{-\lambda t}\omega_y + \frac{I_3}{I_1}\lambda\omega_x = 0 \qquad ⑤$$

$$\dot{\omega}_y - n\mathrm{e}^{-\lambda t}\omega_x + \frac{I_3}{I_1}\lambda\omega_y = 0 \qquad ⑥$$

⑤ × i + ⑥式得

$$(\dot{\omega}_y + i\dot{\omega}_x) + i n e^{-\lambda t}(\omega_y + i\omega_x) + \frac{I_3}{I_1}\lambda(\omega_y + i\omega_x) = 0$$

设 $\omega = \omega_y + i\omega_x$,则上式变为

$$\dot{\omega} + \left[i n e^{-\lambda t} + \frac{I_3}{I_1}\lambda\right]\omega = 0$$

解得

$$\ln\omega = -\frac{I_3}{I_1}\lambda t + \frac{i}{\lambda} n e^{-\lambda t} + C + Di \qquad (C、D \text{ 为积分常数})$$

所以 $\omega = a e^{-\frac{I_3}{I_1}\lambda t}\left[\cos\left(\frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon\right) + i\sin\left(\frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)\right]$ (其中 $a = e^C, \varepsilon = D$)

故

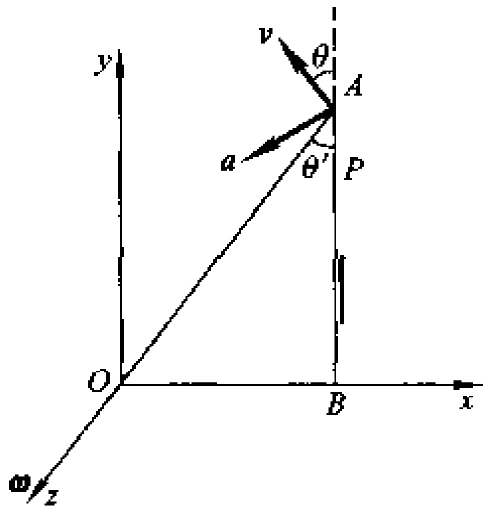
$$\omega_x = a e^{-\frac{I_3}{I_1}\lambda t}\sin\left(\frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

$$\omega_y = a e^{-\frac{I_3}{I_1}\lambda t}\cos\left(\frac{n}{\lambda}e^{-\lambda t} + \varepsilon\right)$$

第四章　转动参照系

4.1　一等腰直角三角形 OAB 在其自身平面内以匀角速 ω 绕顶点 O 转动.某一点 P 以匀相对速度沿 AB 边运动,当三角形转了一周时,P 点走过了 AB.如已知 $\overline{AB}=b$,试求 P 点在 A 时的绝对速度与绝对加速度.

解　如题 4.1.1 图所示.坐标系 $Oxyz$ 的原点位于转动的固定点,Ox 轴沿 OB,Oz 轴与角速度的方向一致,即 $\boldsymbol{\omega}=\omega\boldsymbol{k}$.设 P 点沿 BA 运动的相对速度为 $\boldsymbol{v}'=v'\boldsymbol{j}$.则由题意得:



题 4.1.1 图

$$\frac{b}{v'}=\frac{2\pi}{\omega},\text{得}:v'=\frac{\omega b}{2\pi}$$

故 P 在 A 点时的绝对速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{OA}\\&=\frac{\omega b}{2\pi}\boldsymbol{j}+\omega\boldsymbol{k}\times(b\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{i})\\&=\frac{\omega b}{2\pi}[-2\pi\boldsymbol{i}+(1+2\pi)\boldsymbol{j}]\end{aligned}$$

$$|\boldsymbol{v}|=\frac{\omega b}{2\pi}\sqrt{8\pi^2+4\pi+1}$$

设 $\boldsymbol{v}$ 与 y 轴(即 AB 边)的夹角为 θ,则 $\tan\theta=\left|\frac{v_x}{v_y}\right|=\frac{2\pi}{2\pi+1}$,故 $\boldsymbol{v}$ 与 AB 边的夹角为 $\arctan\frac{2\pi}{2\pi+1}$,且指向左上方.

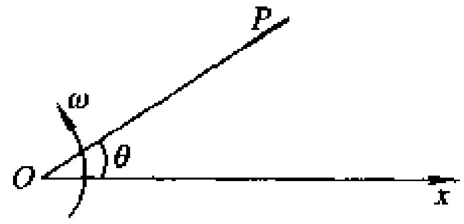
P 在 A 点时绝对加速度

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}' - \omega^2 \boldsymbol{OA} + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \\
&= 0 - \omega^2 (b\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) + 2\omega \boldsymbol{k} \times \frac{\omega b}{2\pi}\boldsymbol{j} \\
&= -\frac{\omega^2 b}{\pi}[(1+\pi)\boldsymbol{i} + \pi \boldsymbol{j}]
\end{aligned}
$$

$$
|\boldsymbol{a}| = \frac{\omega^2 b}{\pi}\sqrt{2\pi^2 + 2\pi + 1}
$$

设 $\boldsymbol{a}$ 与 y 轴(AB 边)的夹角为 θ',则 $\tan\theta' = \left|\frac{a_x}{a_y}\right| = \frac{\pi+1}{\pi}$,故 $\boldsymbol{a}$ 与 AB 边的夹角为 $\arctan\frac{\pi+1}{\pi}$,且指向左下方.

4.2 一直线以匀角速 ω 在一固定平面内绕其一端 O 转动.当直线位于 Ox 的位置时,有一质点 P 开始从 O 点沿该直线运动.如欲使此点的绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 的量值为常数,问此点应按何种规律沿此直线运动?



题 4.2.1 图

解 如题 4.2.1 图所示,以 Ox 为极轴,直线 Ox 转动的方向为极角方向建立极坐标系.Oz 轴垂直纸面向外,设 P 点相对速度为 $\boldsymbol{v}' = \dot{r}\boldsymbol{e}_r$,故 P 点的绝对速度

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OP} \\
&= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + \omega \boldsymbol{k} \times r\boldsymbol{e}_r \\
&= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + \omega r \boldsymbol{e}_\theta \qquad ①
\end{aligned}
$$

设绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 的量值为常数 v,则:

$$
\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 = v^2 \qquad ②
$$

对②式两边同时求时间导数得:

$$
2\dot{r}(\ddot{r} + \omega^2 r) = 0
$$

依题意 $\dot{r} \neq 0$,故 $\ddot{r} + \omega^2 r = 0$

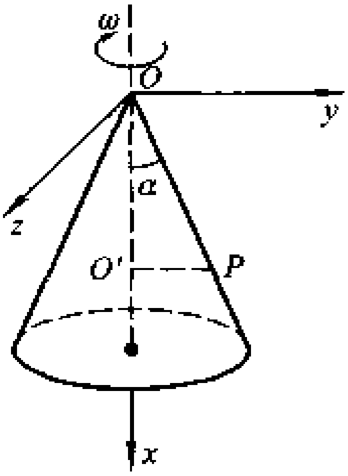
解得通解 $r(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

当 $t=0$ 时,$r(t)=0$,将其代入①式又可得知:$t=0$ 时,$\dot{r}=v$.

即 $\begin{cases} A=0 \\ B\omega=v \end{cases}$ 得 $\begin{cases} A=0 \\ B=\dfrac{v}{\omega} \end{cases}$

最后有 $$r(t)=\frac{v}{\omega}\sin\omega t$$

4.3 P 点离开圆锥顶点 O，以速度 v' 沿母线作匀速运动，此圆锥则以匀角速 ω 绕其轴转动. 求开始 t 秒后 P 点绝对加速度的量值，假定圆锥体的半顶角为 α.



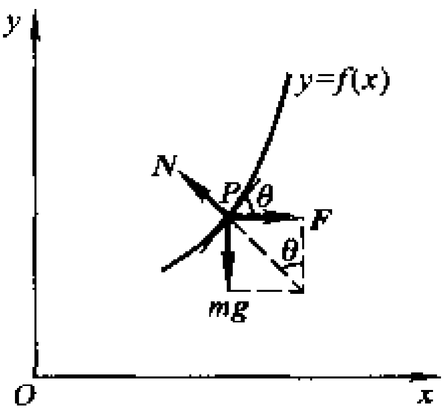
题 4.3.1 图

解 如题 4.3.1 图所示，直角坐标 $Oxyz$ 的原点位于圆锥顶点，Ox 轴过圆锥的对称轴，且使 P 点一直在 Oxy 平面内运动. O' 为 P 点在轴上对应的一点，且有 $O'P \perp x$ 轴，所以 P 点的绝对加速度：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{a}' - \omega^2\boldsymbol{R} + 2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}' \\ &= 0-\omega^2\boldsymbol{O'P}+2\omega\boldsymbol{i}\times v'(\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j}) \\ &= -\omega^2 O'P\sin\alpha\boldsymbol{j}+2\omega v'\sin\alpha\boldsymbol{k} \\ &= -\omega^2 v't\sin\alpha\boldsymbol{j}+2\omega v'\sin\alpha\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

最后有 $$a=\omega v'\sin\alpha\sqrt{\omega^2t^2+4}.$$

4.4 小环重 W，穿在曲线形 $y=f(x)$ 的光滑钢丝上，此曲线通过坐标原点，并绕竖直轴 Oy 以匀角速 ω 转动. 如欲使小环在曲线上任何位置均处于相对平衡状态，求此曲线的形状及曲线对小环的约束反作用力.



题 4.4.1 图

解 如题 4.4.1 图所示，坐标系 Oxy 是以 ω 绕 y 轴转动的坐标系.

图中画出的是曲线 $y=f(x)$ 的一段. 在任意一点 P 处，假设某质点在此处静止，则该质点除了受重力、钢丝的

约束力之外，还会受惯性离心力 F 的作用，$F=m\omega^2x$，方向沿 x 轴正向.

在 N,F,mg 作用下，质心处于平衡状态，则有

$$\frac{F}{mg}=\tan\theta(\theta\text{ 为过 }P\text{ 点的切线与水平方向夹角}) \quad ①$$

$$N=mg/\cos\theta \quad ②$$

由①得 $$\frac{m\omega^2x}{mg}=\tan\theta=\frac{dy}{dx},\text{得}\frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2x}{g} \quad ③$$

又因为 $y=f(x)$ 过原点. 对上式积分得抛物线 $y=\dfrac{\omega^2x^2}{2g}$.

由③得

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega^2x}{g}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\omega^2}{g}y}}$$

将 $\cos\theta$ 代入②得反作用力

$$N=W\sqrt{1+\frac{2\omega^2}{g}y}$$

4.5 在一光滑水平直管中有一质量为 m 的小球. 此管以匀角速 ω 绕通过其一端的竖直轴转动. 如开始时，球距转动轴的距离为 a，球相对于管的速率为零，而管的总长则为 $2a$. 求球刚要离开管口时的相对速度与绝对速度，并求小球从开始运动到离开管口所需的时间.

解 以直管为参考系，Ox 沿管，Oz 沿竖直轴建立坐标系 $Oxyz$，则小球受力为：

$$\boldsymbol{G}=mg,\boldsymbol{N},\boldsymbol{F}_{牵}=m\omega^2x\boldsymbol{i},\boldsymbol{F}_{科}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}$$

故沿 Ox 方向运动的微分方程为：

$$m\ddot{x}=m\omega^2x$$

即 $$\ddot{x}-\omega^2x=0 \quad ①$$

由初始条件：$t=0,x=a,\dot{x}=0$ 可得①式解为

$$x=\frac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$$

故当球刚离开管口时，即 $x=2a$，$\dot{x}>0$ 时.

则
$$\begin{cases} 2a=\dfrac{a}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t}) \\ \dfrac{a}{2}(e^{\omega t}\omega-\omega e^{-\omega t})>0 \end{cases}$$

得
$$t=\ln(2+\sqrt{3})/\omega$$

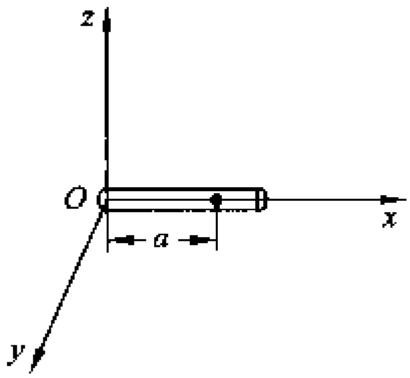
所以此时：

$$\boldsymbol{v}'=\dot{x}|_{x=2a}\boldsymbol{i}=\frac{a}{2}\omega k\times 2\sqrt{3}\boldsymbol{i}=\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}')|_{x=2a}=\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{i}+2a\omega\boldsymbol{j}$$

故当球刚要离开管口时的相对速度为$\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{i}$，绝对速度为$\sqrt{3}a\omega\boldsymbol{i}+2a\omega\boldsymbol{j}$，小球从开始运动到离开管口所需时间为 $\ln(2+\sqrt{3})/\omega$.

4.6 一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速 ω 转动，管中有一质量为 m 的质点.开始时，细管取水平方向，质点距转动轴的距离为 a，质点相对于管的速度为 v_0，试求质点相对于管的运动规律.



题 4.6.1 图

解 以光滑细管为参考系，Ox 沿管，Oz 沿水平轴建立坐标系 $Oxyz$，如题 4.6.1 图所示，则小球受力为：

$\boldsymbol{G}=m\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{F}_{牵}=m\omega^2x\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{F}_{科}=-2m\omega\dot{x}\boldsymbol{j}$

故沿 Ox 方向运动的微分方程为：

$$m\ddot{x}=m\omega^2x-mg\sin\omega t$$

即
$$\ddot{x}-\omega^2x=-g\sin\omega t \qquad ①$$

方程 $\ddot{x}-\omega^2x=0$ 的通解为 $x(t)=C_1e^{-\omega t}+C_2e^{\omega t}$

而方程①的特解为：$x(t)=\dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$

故方程①的通解为：$x=C_1e^{-\omega t}+C_2e^{\omega t}+\dfrac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$

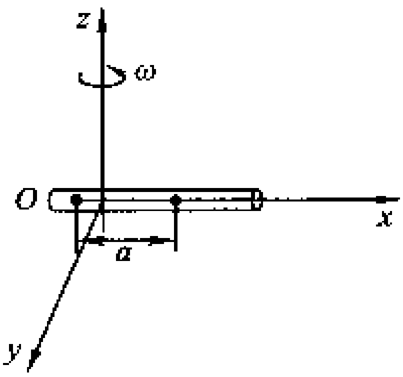
初始条件为当 $t=0$ 时，$x=a$，$\dot{x}=v_0$

故可得：
$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{v_0}{\omega} + \dfrac{g}{2\omega^2}\right) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{v_0}{\omega} - \dfrac{g}{2\omega^2}\right) \end{cases}$$

所以质点相对于管的运动规律为：

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{v_0}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)e^{\omega t} + \frac{1}{2}\left(a - \frac{v_0}{\omega} + \frac{g}{2\omega^2}\right)e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t$$

4.7 质量分别为 m 及 m' 的两个质点，用一固有长度为 a 的弹性绳相连，绳的倔强系数为 $k = \dfrac{2mm'\omega^2}{m + m'}$. 如将此系统放在光滑的水平管中，管子绕管上某点以匀角速 ω 转动，试求任一瞬时两质点间的距离. 设开始时，质点相对于管子是静止的.



题 4.7.1 图

解 以水平管为参考系，Ox 沿管，Oz 沿竖直转动轴向上建立坐标系 $Oxyz$，如题 4.7.1 图所示.

则易得质点 m、m' 沿 Ox 方向的运动微分方程为：

$$m\ddot{x} = m\omega^2 x + k(s - a) \quad ①$$

$$m'(\ddot{x} + \ddot{s}) = m'\omega^2(x + s) - k(s - a) \quad ②$$

将方程①②作简单变换可得：

$$m'\ddot{s} + \frac{m'}{m}k(s - a) = m'\omega^2 s - k(s - a)$$

化简得：
$$\ddot{s} + \omega^2 s = 2\omega^2 a$$

其通解为：
$$s = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t} + 2a$$

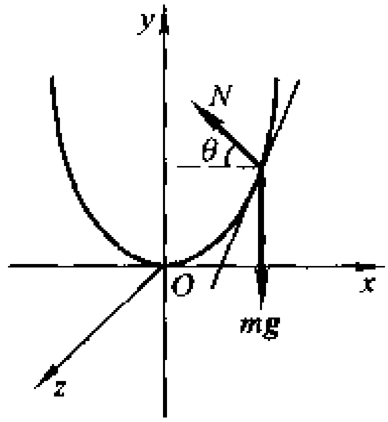
初始条件为：
$$s|_{t=0} = a,\ \dot{s}|_{t=0} = 0$$

故可得：
$$\left.\begin{aligned} C_1 + C_2 &= -a \\ -i\omega(C_1 - C_2) &= 0 \end{aligned}\right\} 得\ C_1 = C_2 = -\frac{a}{2}$$

故
$$s = 2a - a\cos\omega t$$

即
$$s = a(2 - \cos\omega t)$$

4.8 轴为竖直而顶点向下的抛物线形金属丝，以匀角速 ω 绕竖直轴转动．另有一质量为 m 的小环套在此金属丝上，并沿着金属丝滑动．试求小环运动微分方程．已知抛物线的方程为 $x^2=4ay$，式中 a 为常数．计算时可忽略摩擦阻力．



题 4.8.1 图

解 以抛物线形金属丝为参照系，Ox 沿抛物线在顶点的切线方向，Oy 沿竖直轴建立坐标系 $Oxyz$，则小环的运动微分方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{x}=m\omega^2x-N_x & ① \\ m\ddot{y}=-mg+N_y & ② \\ m\ddot{z}=0=N_z+2mv'\omega \end{cases}$$

又：
$$\frac{N_x}{N_y}=\cot\theta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$y=\frac{1}{4a}x^2$$

故
$$\ddot{y}=\frac{1}{2a}(\dot{x}^2+x\ddot{x}),\quad \frac{N_x}{N_y}=\frac{1}{2a}x$$

代入①②得
$$-\frac{m\ddot{x}-m\omega^2x}{m\frac{1}{2a}(\dot{x}^2+x\ddot{x})+mg}=-\frac{1}{2a}x$$

化简即得
$$\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)\ddot{x}+\frac{x}{4a^2}\dot{x}^2-\omega^2x+\frac{g}{2a}x=0$$

4.9 在上题中，试用两种方法求小环相对平衡的条件．

解一 当小环相对平衡时，由上题可知即要求 x 为常数，故 $\dot{x}=0$，$\ddot{x}=0$

故
$$\omega^2=\frac{g}{2a}$$

解二 以地面为参考系，则小球受力为 $\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{G}$，如图 4－8 所示．其中 $Oxyz$ 为固定于地面的坐标系，故平衡时有：

$$\begin{cases} N\cos\theta = m\omega^2 x \\ N\sin\theta = mg \end{cases}$$

所以
$$\tan\theta = \frac{mg}{\omega^2 x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{2a}{x}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{2a}$$

4.10 质量为 m 的小环 M,套在半径为 a 的光滑圆圈上,并可沿着圆圈滑动.如圆圈在水平面内以匀角速 ω 绕圈上某点 O 转动,试求小环沿圆圈切线方向的运动微分方程.

解 以地面为参考系,则小环的运动微分方程为

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = N\cos\dfrac{\theta}{2} \\ m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = N\sin\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

其中 $r = 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$,$\varphi = \omega t + \dfrac{\theta}{2}$,$\theta$ 为 M 与圆心 C 的联线和通过 O 点的直径间所夹的角.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}}{\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2} = \frac{a\cos\dfrac{\theta}{2}\ddot{\theta} - 2a\sin\dfrac{\theta}{2}\dot{\theta}\left(\omega + \dfrac{1}{2}\dot{\theta}\right)}{-a\sin\dfrac{\theta}{2}\ddot{\theta} - a\cos\dfrac{\theta}{2}(\dot{\theta}^2 + 2\omega^2 + 2\omega\dot{\theta})}$$

化简得
$$\ddot{\theta} + \sin\theta\omega^2 = 0$$

4.11 如自北纬为 λ 的地方,以仰角 α 自地面向东方发射一炮弹,炮弹的膛口速度为 V.计及地球自转,试证此炮弹落地时的横向偏离为

$$d = \frac{4V^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

式中 ω 为地球自转的角速度.计算时可忽略 ω^2 项.

解 以地面为非惯性参考系,建立坐标系 $Oxyz$,Ox 指正南,Oz 竖直向上,发射点为原点 O,炮弹的运动微分方程为:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda & ① \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) & ② \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda & ③ \end{cases}$$

初始条件为 $\begin{cases} t = 0 \\ x = y = z = 0 \\ \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = v\cos\alpha \\ \dot{z} = v\sin\alpha \end{cases}$

故将①②③积分一次并代入初始条件后得:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda \\ \dot{y} = V\cos\alpha - 2\omega(x\sin\lambda + z\cos\lambda) \\ \dot{z} = V\sin\alpha - gt + 2\omega y\cos\lambda \end{cases}$$

将此再代入①②③略去 ω^2 项得:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\omega V\sin\lambda\cos\alpha & ④ \\ \ddot{y} = 2\omega\cos\lambda(gt - V\sin\alpha) & ⑤ \\ \ddot{z} = -g + 2\omega V\cos\lambda\cos\alpha & ⑥ \end{cases}$$

由⑥可得落地时间:

$$t = \frac{2V\sin\alpha}{g} \times \frac{1}{1-b} \quad ⑦$$

其中 $b = \dfrac{2\omega V\cos\lambda\cos\alpha}{g}$

又 $b \propto \omega \ll 1$

所以将 $\dfrac{1}{1-b}$ 展开可得 $\dfrac{1}{1-b} \approx 1 + b$

$$t = \frac{2V\sin\alpha}{g}(1+b)$$

由④式及初始条件可得 $x = \omega V\sin\lambda\cos\alpha t^2$

所以炮弹落地时的横向偏离为

$$d = \omega V\sin\lambda\cos\alpha\frac{4V^2\sin^2\alpha}{g^2}(1+b)^2 \approx \frac{4V^3}{g^2}\omega\sin\lambda\sin^2\alpha\cos\alpha$$

4.12 一质点如以初速 v_0 在纬度为 λ 的地方竖直向上射出，达到 h 高后，复落至地面. 假定空气阻力可以忽略不计，试求落至地面时的偏差.

解 以地面为非惯性系，建立坐标系 $Oxyz$，Ox 指向正南，Oz 竖直向上，上抛点为原点 O，质点的运动微分方程为：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\omega\dot{y}\sin\lambda \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\lambda + \dot{z}\cos\lambda) \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{y}\cos\lambda \end{cases} \qquad ⊛$$

初始条件为：
$$\begin{cases} t = 0 \\ x = y = z = 0 \\ \dot{x} = \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = v_0 \end{cases}$$

如上题同理可得：
$$\begin{cases} \dot{x} = 2\omega y\sin\lambda \\ \dot{y} = -2\omega(x\sin\lambda + z\cos\lambda) \\ \dot{z} = v_0 - gt + 2\omega y\cos\lambda \end{cases}$$

代入⊛式得：
$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 & ① \\ \ddot{y} = 2\omega\cos\lambda(gt - v_0) & ② \\ \ddot{z} = -g & ③ \end{cases}$$

由③式求出落地时间为：$t = \dfrac{2v_0}{g}$

由②式得：$y = \dfrac{1}{3}\omega\cos\lambda g t^3 - \omega\cos\lambda v_0 t^2$

将 $t = \dfrac{2v_0}{g}$，$v_0 = \sqrt{2gh}$ 代入得复落至地面时：

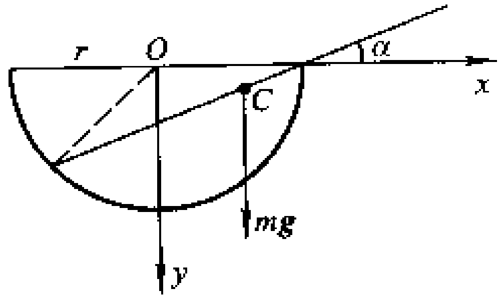
$$d = -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{8h^3}{g}}\omega\cos\lambda$$

（d 取负值，说明落地时偏西）

第五章 分析力学

5.1 试用虚功原理解 3.1 题.

解 如题 5.1.1 图杆受理想约束,在满足题意的约束条件下杆的位置可由杆与水平方向夹角 α 所唯一确定.杆的自由度为 1,由平衡条件:



题 5.1.1 图

$$\delta\omega = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta r_i = 0$$

即 $$mg \cdot \delta y_c = 0 \qquad ①$$

变换方程 $$y_c = 2r\cos\alpha\sin\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha$$

$$= r\sin 2\alpha - \frac{l}{2}\sin\alpha \qquad ②$$

故 $$\delta y_c = \left(2r\cos 2\alpha - \frac{1}{2}l\cos\alpha\right)\delta\alpha \qquad ③$$

代回①式即 $$\left(2r\cos 2\alpha - \frac{1}{2}l\cos\alpha\right)\delta\alpha = 0$$

因 $\delta\alpha$ 在约束条件下是任意的,要使上式成立必须有:

$$2r\cos 2\alpha - \frac{l}{2}\cos\alpha = 0$$

$$l = \frac{4r\cos 2\alpha}{\cos\alpha} \qquad ①$$

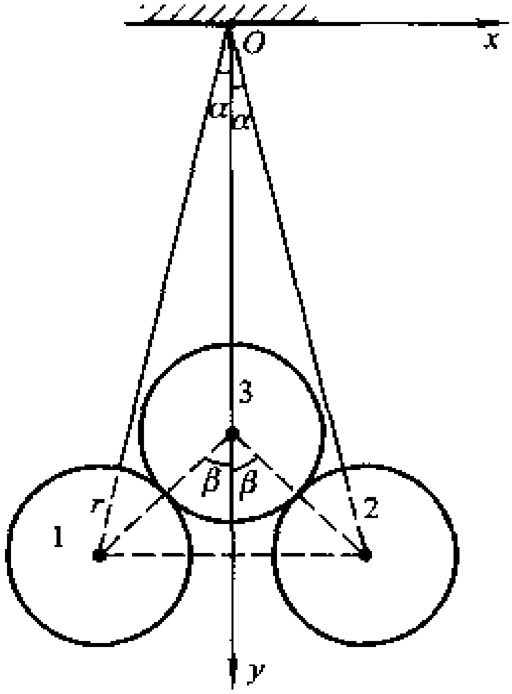
又由于 $$\cos\alpha = \frac{c}{2r}$$

故 $$\cos 2\alpha = \frac{c^2 - 2r^2}{2r^2}$$

代回①式得: $$l = \frac{4(c^2 - 2r^2)}{c}$$

5.2 试用虚功原理解 3.4 题.

解 如题 5.2.1 图三球受理想约束,球的位置可以由 α 确定,自由度数为 1,故.



题 5.2.1 图

$$\begin{cases} x_1 = -2r\sin\beta = -(l+r)\sin\alpha \\ x_2 = 2r\sin\beta = (l+r)\sin\alpha \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = (l+r)\cos\alpha \\ y_2 = (l+r)\cos\alpha \\ y_3 = (l+r)\cos\alpha - 2r\cos\beta \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \delta y_1 = -(l+r)\sin\alpha\delta\alpha \\ \delta y_2 = -(l+r)\sin\alpha\delta\alpha \\ \delta y_3 = -(l+r)\sin\alpha\delta\alpha \\ \qquad\quad + 2r\sin\beta\dfrac{\delta\beta}{\delta\alpha}\cdot\delta\alpha \end{cases}$$

由虚功原理 $$\delta w = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = 0$$

故

$$P_1\delta y_1 + P_2\delta y_2 + P_3\delta y_3 = 0$$

$$-(l+r)\sin\alpha\delta\alpha - (l+r)\sin\alpha\delta\alpha - (l+r)\sin\alpha\delta\alpha$$

$$+ 2r\sin\beta\frac{\delta\beta}{\delta\alpha}\cdot\delta\alpha = 0 \qquad ①$$

因 $\delta\alpha$ 在约束条件下是任意的,要使上式成立,必须

$$-3(l+r)\sin\alpha + 2r\sin\beta\frac{\delta\beta}{\delta\alpha} = 0$$

故 $$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{2r\sin\beta}{3(l+r)\sin\alpha} \qquad ②$$

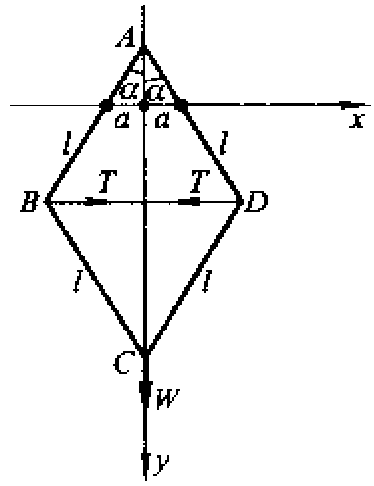
又由 $\delta x_1 = 2r\cos\beta\delta\beta = -(l+r)\cos\alpha\delta\alpha$ 得:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{2r\cos\beta}{(l+r)\cos\alpha} \qquad ③$$

由②③可得

$$\tan\beta = 3\tan\alpha$$

5.3 长度同为 l 的轻棒四根，光滑地联成一菱形 $ABCD$. AB、AD 两边支于同一水平线上相距为 $2a$ 的两根钉上，BD 间则用一轻绳联结，C 点上系一重物 W. 设 A 点上的顶角为 2α，试用虚功原理求绳中张力 T.



题 5.3.1 图

解 如题 5.3.1 图，在相距 $2a$ 的两钉处约束反力垂直于虚位移，为理想约束. 去掉绳代之以力 T，且视为主动力后采用虚功原理，α 一确定便可确定 $ABCD$ 的位置。因此自由度数为 1. 选 α 为广义坐标.

由虚功原理：
$$\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \delta r_i = 0$$

$$W\delta y_c - T_B\delta x_B + T_D\delta x_D = 0 \quad ①$$

又 $\quad x_B = -l\sin\alpha,\ x_D = l\sin\alpha,\ y_c = 2l\cos\alpha - a\cot\alpha$

取变分得

$$\delta x_B = -l\cos\alpha\delta\alpha;\quad \delta x_D = l\cos\alpha\cdot\delta\alpha;$$

$$\delta y_c = -2l\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha$$

代入①式得：

$$W\left(-2l\sin\alpha\delta\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\delta\alpha\right) + T_D(l\cos\alpha + l\cos\alpha)\delta\alpha = 0$$

化简得 $$\left[W\left(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\right) + 2Tl\cos\alpha\right]\delta\alpha = 0 \quad ②$$

设 $T_B = T_D = T$

因 $\delta\alpha$ 在约束条件下任意，欲使上式成立，须有：

$$W\left(-2l\sin\alpha + \frac{a}{\sin^2\alpha}\right) + 2Tl\cos\alpha = 0$$

由此得 $$T=W\tan\alpha\left(\frac{a}{2l}\csc^3\alpha-1\right)$$

5.4 一质点的重量为 W，被约束在竖直圆周

$$x^2+y^2-r^2=0$$

上，并受一水平斥力 k^2x 的作用，式中 r 为圆的半径，k 为常数. 试用未定乘数法求质点的平衡位置及约束反作用力的量值.

解 自由度 $s=1$，质点位置为 (x,y).

由
$$\begin{cases}F_{ix}+\sum\limits_{\beta=1}^{k}\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial x_i}=0\\ F_{iy}+\sum\limits_{\beta=1}^{k}\lambda_\beta\dfrac{\partial f_\beta}{\partial y_i}=0\end{cases}\qquad ①$$

由已知得 $$i=1,f(x,y)=x^2+y^2-r^2=0$$

故
$$\begin{cases}k^2x+2\lambda x=0\\ W+2\lambda y=0\end{cases}\qquad ②$$

约束方程： $$x^2+y^2=r^2\qquad ③$$

联立②③可求得
$$\begin{cases}x=0\\ y=\pm r\\ \lambda=\mp\dfrac{W}{2r}\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=\pm\sqrt{r^2-W^2/k^4}\\ y=\dfrac{W}{k^2}\\ \lambda=-\dfrac{k^2}{2}\end{cases}$$

又由于 $$R=\lambda|\nabla f|=\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}=\lambda\sqrt{4(x^2+y^2)}=2\lambda r$$

故
$$\begin{cases}x=0\\ y=\pm r\\ R=\mp W\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=\pm\sqrt{r^2-W^2/k^4}\\ y=W/k^2\\ R=-k^2r\end{cases}$$

5.5 在离心节速器中，质量为 m_2 的质点 C 沿着一竖直轴运动，而整个系统则以匀角速 Ω 绕该轴转动. 试写出此力学体系的拉氏函数. 设连杆 AB、BC、CD、DA 等的质量均可不计.

解 如题 5.5.1 图，按题意仅重力作用，为保守力系. 因为已

知 $\dot{\psi}=\Omega$,故可认为自由度为 1.选广义坐标 $\theta=q$,在球面坐标系中,质点的动能(参见教材 5.3.33 式):

$$T_i=\frac{1}{2}m_i(\dot{r}_i^2+r_i^2\dot{\theta}_i^2+r_i^2\sin^2\theta_i\dot{\psi}_i^2)$$ (其中 i 代表指标 B、C、D)

由于 $r_B=r_D=a$, $\theta_B=\theta_D=\theta$

所以 $T_B=T_D$

$$=\frac{1}{2}m_1(a^2\dot{\theta}^2+\Omega^2a^2\sin^2\theta)$$

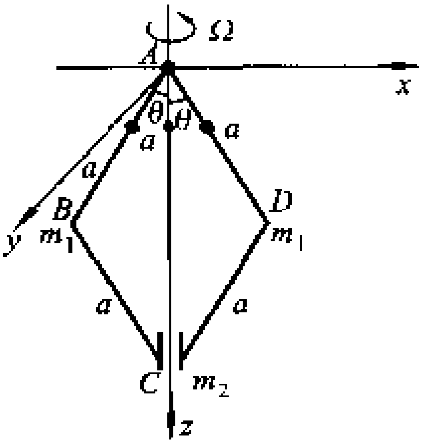
又由于 $\theta_C=0$, $r_C=2a\cos\theta$

故 $$T_C=\frac{1}{2}m_2\left(\frac{\mathrm{d}2a\cos\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

$$=2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$

$$T=T_B+T_D+T_C$$

$$=m_1(a^2\dot{\theta}^2+\Omega^2a^2\sin^2\theta)+2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$$



题 5.5.1 图

取 Ox 为零势,体系势能为:

$$V=-2ga(m_1+m_2)\cos\theta$$

故力学体系的拉氏函数为:

$$L=T-V$$

$$=m_1a^2(\dot{\theta}^2+\Omega^2\sin^2\theta)+2m_2a^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+2ga(m_1+m_2)\cos\theta$$

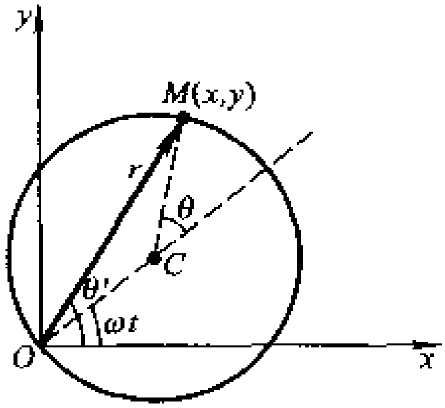
5.6 试用拉格朗日方程解 4.10 题.

解 如题 5.6.1 图.

(1) 平面运动,一个自由度。

(2) 选广义坐标为 $q=\theta$,广义速度 $\dot{q}=\dot{\theta}$

(3) 因未定体系受力类型,由一般形式的拉格朗日方程



题 5.6.1 图

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha \qquad ①$$

在 $\delta W=\sum_{i=1}^{n} F_i\cdot\delta r_i=Q_1\delta\theta=0$，广义力 $Q_1=0$.

代入①式得：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta}=0 \quad ②$$

在极坐标系下：

$$T=\frac{1}{2}m(\dot r^2+r^2\dot\theta^2)$$
$$=\frac{1}{2}m\left[\left(\frac{\mathrm{d}2a\cos\frac{\theta}{2}}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(2a\cos\frac{\theta}{2}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}+\omega t\right)}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}m\left(4a^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}+4a^2\omega\dot\theta\cos^2\frac{\theta}{2}+a^2\dot\theta^2\right) \quad ③$$

故
$$\frac{\partial T}{\partial\theta}=-ma^2\omega^2\sin\theta-ma^2\omega\dot\theta\sin\theta$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}=ma^2\dot\theta+2ma^2\omega\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\theta}\right)=ma^2\ddot\theta-ma^2\omega\dot\theta\sin\theta$$

将以上各式代入②式得
$$ma^2\ddot\theta-2ma^2\omega\dot\theta\sin\theta+ma^2\omega^2\sin\theta+2ma^2\omega\dot\theta\sin\theta=0$$

即
$$\ddot\theta+\omega^2\sin\theta=0$$

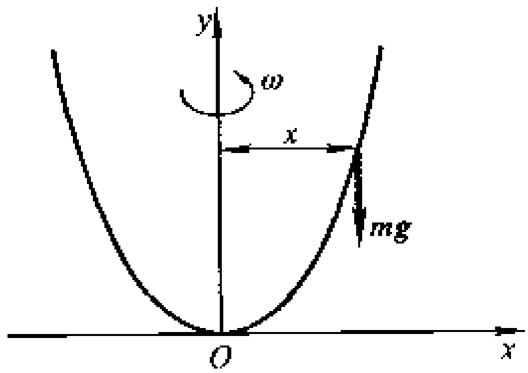
5.7 试用拉格朗日方程解本章补充例题 5.3.

解 如题 5.7.1 图.

(1) 由于约束方程 $x^2=4ay$，自由度可视为 1.

(2) 选广义坐标 $q=x$.

(3) 因抛物线和金属丝绕 y 轴转动，故小环有牵连速度 ωx，垂直纸面向里，故：



题 5.7.1 图

$$v^2=\dot x^2+\dot y^2+\omega^2x^2$$

又由于
$$\dot{y}=\frac{x}{2a}\dot{x}$$

所以
$$T=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2+\left(\frac{x}{2a}\dot{x}\right)^2+\omega^2x^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+\omega^2x^2\right] \quad ①$$

取坐标原点为零势面
$$V=mgy=mg\frac{x^2}{4a} \quad ②$$

拉氏函数
$$L=T-V=\frac{1}{2}m\left[\dot{x}^2\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+\omega^2x^2\right]-mg\frac{x^2}{4a} \quad ③$$
$$\frac{\partial L}{\partial x}=\left(\frac{m\dot{x}^2}{4a^2}+m\omega^2\right)x-mg\frac{x}{2a}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+m\dot{x}^2\frac{x}{2a^2}$$

代入保守系拉格朗日方程$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$得
$$m\ddot{x}\left(1+\frac{x^2}{4a^2}\right)+m\dot{x}^2\frac{x}{4a^2}-m\omega^2x+mg\frac{x}{2a}=0$$

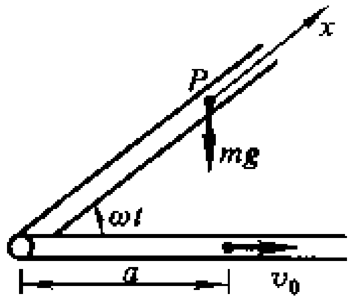
5.8 一光滑细管可在竖直平面内绕通过其一端的水平轴以匀角速 ω 转动．管中有一质量为 m 的质点．开始时，细管取水平方向，质点距转动轴的距离为 a，质点相对于管的速度为 v_0，试由拉格朗日方程求质点相对于管的运动规律．

解 如题 5.8.1 图．

(1) 由于细管以匀角速 ω 转动，因此 $\dot{\theta}=\omega$ 可以认为质点的自由度为 1．

(2) 取广义坐标 $x=q$．

(3) 根据极坐标系中的动能



题 5.8.1 图

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+x^2\omega^2)$$

取初始水平面为零势能面

势能 $V=mgx\sin(\omega t)$

拉氏函数 $L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\omega^2x^2)-mgx\sin(\omega t)$ ①

(4) $\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=m\dot{x},\frac{\partial L}{\partial x}=m\omega^2x-mg\sin(\omega t)$代人拉氏方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0$ 得:

$$m\ddot{x}-m\omega^2x=-mg\sin(\omega t)$$

(5) 先求齐次方程的解.

由 $$\ddot{x}-\omega^2x=0 \quad ②$$

得 $$x=c_1\mathrm{e}^{\omega t}+c_2\mathrm{e}^{-\omega t}$$

特解为 $\frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$

故①式的通解为 $x=c_1\mathrm{e}^{\omega t}+c_2\mathrm{e}^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$ ③

在 $t=0$ 时: $$a=c_1+c_2 \quad ④$$

$$\dot{x}=v_0=c_1\omega-c_2\omega+\frac{g}{2\omega} \quad ⑤$$

联立④⑤得 $$c_1=\frac{1}{2}\left(a+\frac{v_0}{\omega}\right)-\frac{g}{4\omega^2}$$

$$c_2=\frac{1}{2}\left(a-\frac{v_0}{\omega}\right)+\frac{g}{4\omega^2}$$

将 c_1、c_2 代回③式可得方程的解为:

$$x=\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{v_0}{\omega}\right)-\frac{g}{4\omega^2}\right]\mathrm{e}^{\omega t}+\left[\frac{1}{2}\left(a-\frac{v_0}{\omega}\right)+\frac{g}{4\omega^2}\right]\mathrm{e}^{-\omega t}+\frac{g}{2\omega^2}\sin(\omega t)$$

5.9 设质量为 m 的质点,受重力作用,被约束在半顶角为 α 的圆锥面内运动.试以 r,θ 为广义坐标,由拉格朗日方程求此质点的运动微分方程.

解 如题5.9.1图.

(1) 按题意为保守力系,质点被约束在圆锥面内运动,故自由度数为 2.

(2) 选广义坐标 $q_1 = r$, $q_2 = \theta$.

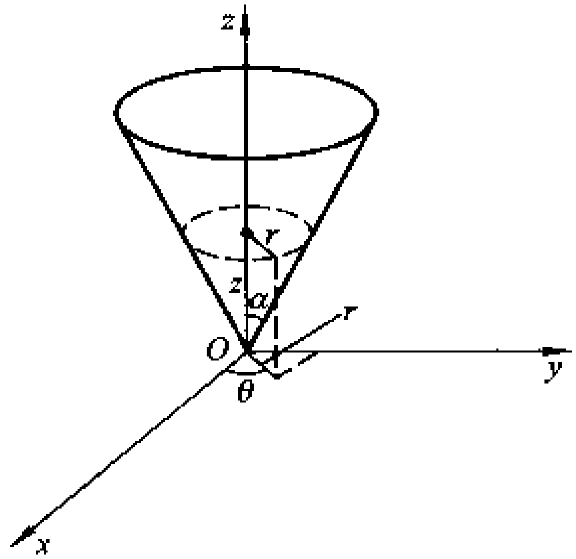
(3) 在柱坐标系中:

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2)$$

又 $\qquad z = r\cot\alpha$

所以

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha)$$



题 5.9.1 图

以 Oxy 面为零势面,则:

$$V = mgr\cot\alpha$$

拉氏函数 $\quad L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha) - mgr\cot\alpha \quad ①$

(4) 因为 L 不显含 θ,所以 θ 为循环坐标,即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = 常数 \qquad ②$$

对另一广义坐标

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - mg\cot\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{r}} = m\dot{r} + m\dot{r}\cot^2\alpha$$

代入保守系拉氏方程 $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \qquad ③$

有 $\qquad m\ddot{r} + m\ddot{r}\cot^2\alpha - mr\dot{\theta}^2 + mg\cot\alpha = 0$

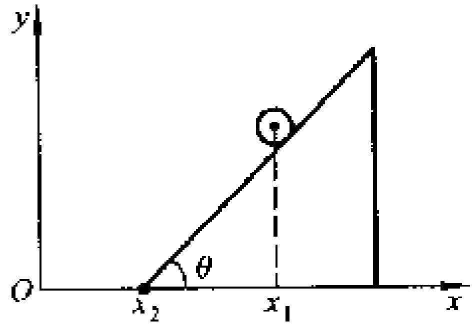
得 $\qquad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + mg\sin\alpha\cos\alpha = 0 \qquad ④$

所以此质点的运动微分方程为

$$\begin{cases} r^2\dot{\theta} = \text{常数} \\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

5.10 试用拉格朗日方程解 2.4 题中的(a)及(b).

解 如题 5.10.1 图.



题 5.10.1 图

(1) 体系自由度数为 2.

(2) 选广义坐标 $q_1 = x_1, q_2 = x_2$.

(3) 质点的速度 $v_1^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2$,

劈的速度 $v_2^2 = \dot{x}_2^2$

故体系动能

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

又
$$y_1 = (x_1 - x_2)\tan\theta$$

所以
$$T = \frac{1}{2}m_1[\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2\tan^2\theta] + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

以 x 面为零势面,体系势能: $V = m_1 g(x_1 - x_2)\tan\theta + C_2$

其中 C_2 为劈势能.

拉氏函数

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}m_1[\dot{x}_1^2 + (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2\tan^2\theta] + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \\ &\quad - m_1 g(x_1 - x_2)\tan\theta - C_2 \end{aligned} \tag{①}$$

(4) $$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -m_1 g\tan\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\tan^2\theta$$

代入拉格朗日方程$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0$,得:

$$m_1\ddot{x}_1(1 + \tan^2\theta) - m_1\ddot{x}_2\tan^2\theta + m_1 g\tan\theta = 0 \tag{②}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = m_1 g\tan\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -m_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\tan^2\theta + m_2\dot{x}_2$$

代入拉格朗日方程得

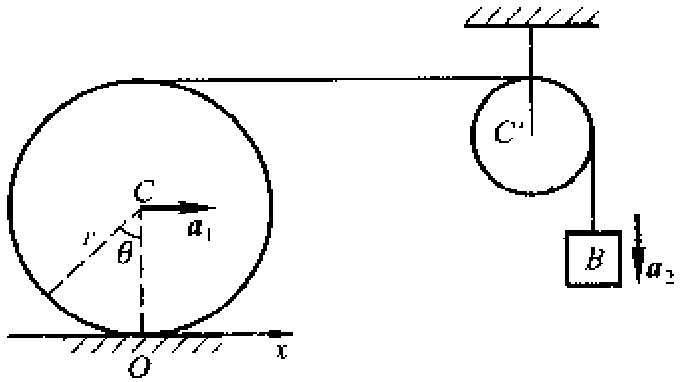
$$-m_1\ddot{x}_1\tan^2\theta + m_1\ddot{x}_2\tan^2\theta + m_2\ddot{x}_2 - m_1 g\tan\theta = 0 \qquad ③$$

联立②、③得

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\dfrac{m_2 g\sin\theta\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta} \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{m_1 g\sin\theta\cos\theta}{m_2 + m_1\sin^2\theta} \end{cases}$$

5.11 试用拉格朗日方程求 3.20 题中的 a_1 及 a_2.

解 如题 5.11.1 图.



题 5.11.1 图

(1) 本系统内虽有摩擦力,但不做功,故仍是保守系中有约束的平面平行运动,自由度 $s=1$.

(2) 选取广义坐标 $q=\theta$.

(3) 根据刚体力学

$$T = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$= \frac{3}{4}Mr^2\dot{\theta}^2 + 2mr^2\dot{\theta}^2$$

其中绕质心转动惯量 $I_C = \frac{1}{2}Mr^2$, $v_C = r\dot{\theta}$, $v_B = 2v_C$

选 Ox 为零势面,体系势能:

$$V = C - 2mgr\theta$$，其中 C 为常数.

拉氏函数

$$L = T - V = \frac{3}{4}Mr^2\dot{\theta}^2 + 2mr^2\dot{\theta}^2 + 2mgr\theta - C$$

(4) $\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2mgr, \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}Mr^2\dot{\theta} + 4mr^2\dot{\theta}$

代入保守系拉氏方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$，得：

$$\frac{3}{2}Mr^2\ddot{\theta} + 4mr^2\ddot{\theta} - 2mgr = 0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{4mg}{(3M + 8m)r}$$

$$a_1 = r\ddot{\theta} = \frac{4mg}{3M + 8m}$$

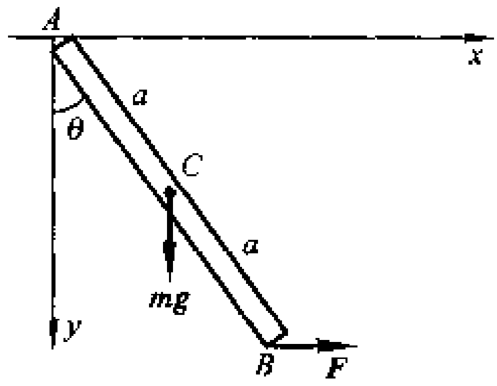
$$a_2 = 2a_1 = \frac{8mg}{3M + 8m}$$

对于物体 B，有

$$mg - T = ma_2$$

$$T = mg - ma_2 = \frac{3Mmg}{3M + 8m}$$

5.12 均质棒 AB，质量为 m，长为 $2a$，其 A 端可在光滑水平导槽上运动．而棒本身又可在竖直面内绕 A 端摆动．如除重力作用外，B 端还受有一水平的力 F 的作用．试用拉格朗日方程求其运动微分方程．如摆动的角度很小，则又如何？



题 5.12.1 图

解　如题 5.12.1 图．

(1) 棒作平面运动，一个约束，故自由度 $s = 2$.

(2) 选广义坐标 $q_1 = x, q_2 = \theta$.

(3) 力学体系的动能

$$T = \frac{1}{2} m v_C{}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \tag{①}$$

根据运动合成　　$v_C = (\dot{x} + a\omega\cos\theta)\boldsymbol{i} - a\omega\sin\theta\boldsymbol{j}$

又　　$\omega = \dot{\theta}$

故　　$v_C^2 = \dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2 + 2a\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$

设 k 为绕质心的回转半径，代入①得动能

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} ma^2\dot{\theta}^2 + ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2} mk^2\dot{\theta}^2 \tag{②}$$

(4) $\boldsymbol{r}_B = (x + 2a\sin\theta)\boldsymbol{i} + 2a\cos\theta\boldsymbol{j}$

由　$\delta W = \theta_\alpha \delta q_\alpha$

$$= \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{F}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i = 0（其中\ \boldsymbol{F}_C = mg\boldsymbol{j}, \boldsymbol{F}_B = F\boldsymbol{i}）, \tag{③}$$

则
$$\delta W = F(\delta x + 2a\cos\theta\delta\theta) - mga\sin\theta\delta\theta$$
$$= F\delta x + (2aF\cos\theta - mga\sin\theta)\delta\theta = 0 \tag{④}$$

因为 δx、$\delta\theta$ 在约束条件下任意且独立，要使上式成立，必须：

$$Q_1 = F, Q_2 = 2aF\cos\theta - mga\sin\theta \tag{⑤}$$

(5) $\dfrac{\partial T}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} + a\dot{\theta}\cos\theta)$

代入一般形式的拉氏方程得：

$$m(\ddot{x} + a\ddot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}^2\sin\theta) = F \tag{⑥}$$

又　$\dfrac{\partial T}{\partial \theta} = \quad ma\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m(a^2\dot{\theta} + a\dot{x}\cos\theta) + mk^2\dot{\theta}$$

代入一般形式的拉氏方程得：

$$m[a\ddot{x}\cos\theta + (a^2 + k^2)\ddot{\theta}] = 2Fa\cos\theta - mga\sin\theta \tag{⑦}$$

⑥、⑦两式为运动微分方程

(6) 若摆动角很小，则 $\sin\theta \to \theta$，$\cos\theta \to 1$，代入⑥⑦式得：

$$\begin{cases}\ddot{x}+a\ddot{\theta}-a\dot{\theta}^2\theta=\dfrac{F}{m}\\ a\ddot{x}+(a^2+k^2)\ddot{\theta}+ga\theta=\dfrac{2Fa}{m}\end{cases}\tag{8}$$

又 $$I_C=mk^2=\frac{m}{12}(2a)^2$$

故 $$k^2=\frac{1}{3}a^2$$

代入⑧式得：

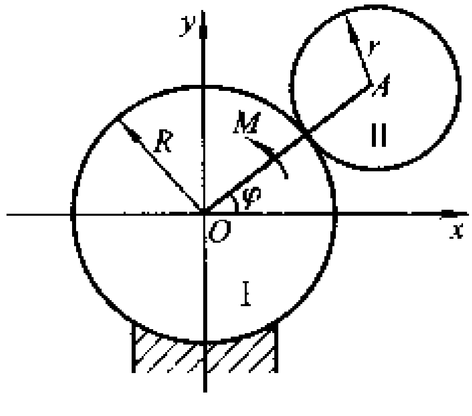
$$\begin{cases}\ddot{x}+a\ddot{\theta}=\dfrac{F}{m}\\ \ddot{x}+\dfrac{4}{3}a\ddot{\theta}+g\theta=\dfrac{2F}{m}\end{cases}\quad(\text{因为 }\theta\text{ 角很小，故可略去 }-a\dot{\theta}^2\theta\text{ 项})$$

5.13 行星齿轮机构如图所示．曲柄 OA 带动行星齿轮Ⅱ在固定齿轮Ⅰ上滚动．已知曲柄的质量为 m_1，且可认为是匀质杆．齿轮Ⅱ的质量为 m_2，半径为 r，且可认为是匀质圆盘．至于齿轮Ⅰ的半径则为 R．今在曲柄上作用一不变的力矩 M．如重力的作用可以略去不计，试用拉格朗日方程研究此曲柄的运动．

解 如题 5.13.1 图．

（1）由于曲柄长度固定，自由度 $s=1$．

（2）选广义坐标 $q=\varphi$，受一力矩，重力忽略，故可利用基本形式拉格朗日方程：



题 5.13.1 图

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha\qquad ①$$

（3）系统动能

$$T=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}m_2v_A^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2$$
$$=\frac{1}{6}m_1(R+r)^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m_2(R+r)^2\dot{\varphi}^2$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}m_2r^2\cdot\left[\frac{(R+r)\dot{\varphi}}{r}\right]^2$$

$$=\frac{1}{6}m_1(R+r)^2\dot{\varphi}^2+\frac{3}{4}m_2(R+r)^2\dot{\varphi}^2 \quad ②$$

(4) 由定义式 $Q_\varphi=\sum F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial\varphi_i}=M$ ③

(5) $\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=\frac{1}{3}m_1(R+r)^2\dot{\varphi}+\frac{3}{2}m_2(R+r)^2\dot{\varphi}$

代入①得：
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=Q_\varphi=M$$

$$\frac{1}{3}m_1(R+r)^2\ddot{\varphi}+\frac{3}{2}m_2(R+r)^2\ddot{\varphi}=M$$

得
$$\ddot{\varphi}=\frac{2M}{3m_2(R+r)^2\left(1+\frac{2}{9}\frac{m_1}{m_2}\right)}$$

5.14 质量为 m 的圆柱体 S 放在质量为 M 的圆柱体 P 上作相对纯滚动，而 P 则放在粗糙平面上. 已知两圆柱的轴都是水平的，且重心在同一竖直面内. 开始时此系统是静止的. 若以圆柱体 P 的重心的初始位置为固定坐标系的原点，则圆柱 S 的重心在任意时刻的坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=c\frac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}\\y&=c\cos\theta\end{aligned}\right\}$$

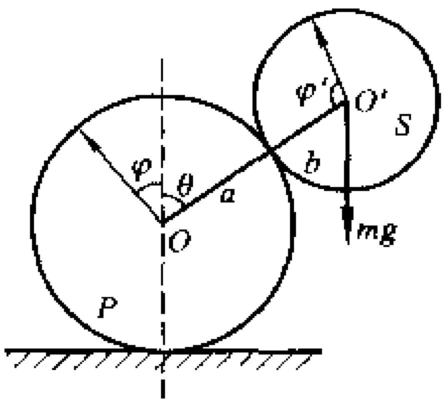
试用拉格朗日方程证明之. 式中 c 为两圆柱轴线间的距离，θ 为两圆柱联心线与竖直向上的直线间的夹角.

解 如题 5.14.1 图.

(1) 因体系作平面平行运动，一个约束方程：

$$a\dot{\varphi}+(a+b)\dot{\theta}=b\dot{\varphi}'$$

(2) 体系自由度 $s=2$，选广义坐标 $q_1=\theta,q_2=\varphi$. 虽有摩擦，但不做



题 5.14.1 图

功，为保守体系.

(3) 体系动能：

$T = P$ 轮平动动能 $+ P$ 轮质心转动动能

$+ S$ 轮质心动能 $+ S$ 轮绕质心转动动能.

$$= \frac{1}{2} I_P \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M(\dot{\varphi} a)^2 + \frac{1}{2} I_S \dot{\varphi}'^2 + \frac{m}{2}[(a+b)\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta$$

$$= \frac{3}{4} M\dot{\varphi}^2 a^2 + \frac{1}{4} m[a\dot{\varphi} + (a+b)\dot{\theta}]^2 + \frac{1}{2} m[(a+b)\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2} m(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta \quad ①$$

以地面为零势面，体系势能

$$V = mg(a+b)\cos\theta + Mga$$

则保守系的拉氏函数

$$L - T - V = \frac{3}{4} M\dot{\varphi}^2 a^2 + \frac{1}{4} m[(a+b)\dot{\theta} + a\dot{\varphi}]^2 + \frac{1}{2} m[(a+b)\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\varphi}]^2 + \frac{m}{2}[(a+b)^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta] - mg(a+b)\cos\theta - Mga \quad ②$$

(4) 因为 L 不显含 φ，得知 φ 为循环坐标.

故 $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} Ma^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2} ma^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2} ma(a+b)\dot{\theta} - ma(a+b)\dot{\theta}\cos\theta + ma^2\dot{\varphi} = \text{常数} \quad ③$$

开始时：$\dot{\varphi} = \dot{\theta} = 0$，则

$$\frac{3}{2} Ma^2\dot{\varphi} + \frac{3}{2} ma^2\dot{\varphi} + \frac{1}{2} ma(a+b)\dot{\theta} - ma(a+b)\dot{\theta}\cos\theta = 0$$

代入 $c = a + b$ 得

$$a\dot{\varphi} = \left[\frac{2mc\cos\theta - mc}{3(M+m)}\right]\dot{\theta}$$

又 $t = 0$ 时，$\theta = \varphi = 0$

所以

$$a\varphi=\frac{2mc\sin\theta-mc\theta}{3(M+m)}$$

$$x=c\sin\theta-a\varphi=c\sin\theta-\frac{2mc\sin\theta-mc\theta}{3(M+m)}$$

$$=c\,\frac{m\theta+(3M+m)\sin\theta}{3(M+m)}$$

$$y=c\cos\theta$$

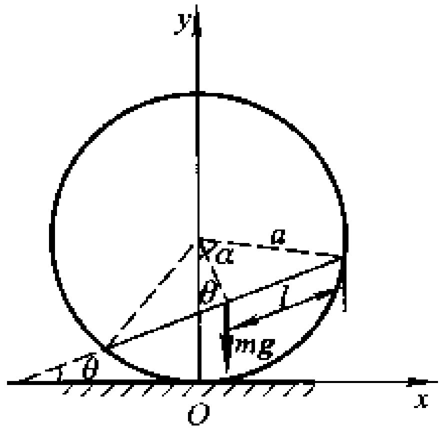
5.15 质量为 M、半径为 a 的薄球壳,其外表面是完全粗糙的,内表面则完全光滑,放在粗糙水平桌上.在球壳内放一质量为 m、长为 $2a\sin\alpha$ 的均质棒.设此系统由静止开始运动,且在开始的瞬间,棒在通过球心的竖直平面内,两端都与球壳相接触,并与水平线成 β 角.试用拉格朗日方程证明在以后的运动中,此棒与水平线所夹的角 θ 满足关系

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2$$
$$=6g(5M+3m)(\cos\theta-\cos\beta)\cos\alpha$$

解 如题 5.15.1 图.

(1)本系统作平面平行运动,杆限制在球壳内运动,自由度 $s=2$;选广义坐标 $q_1=x,q_2=\theta$,体系摩擦力不做功,为保守力系,故可用保守系拉氏方程证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad ①$$



题 5.15.1 图

(2) 体系动能 = 球壳质心动能 + 球壳转动动能 + 杆质心动能 + 杆绕中心转动动能

故
$$T=\frac{1}{2}M\dot{x}^2+\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I_2\omega_2^2 \qquad ②$$

其中 $I_1=\frac{2}{3}Ma^2$, $I_2=\frac{1}{3}ml^2=\frac{1}{3}m(a\sin\alpha)^2$, $v=(\dot{x}+a\cos\alpha\cos\theta\dot{\theta})\boldsymbol{i}+a\cos\alpha\sin\theta\dot{\theta}\boldsymbol{j}$, $\omega_球=\frac{\dot{x}}{a}$, $\omega_杆=\dot{\theta}$代入②得

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)+$$

$$am\dot{x}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta$$

以地面为零势面，则势能：

$$V=mga\cos\alpha\cos\theta+C_1\quad（其中\ C_1\ 为常数）$$

$$L=T-V=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}^2+\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)+$$

$$am\dot{x}\dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta-(mga\cos\alpha\cos\theta+C_1)$$

(3) 因为 x 是循环坐标，故

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\left(\frac{5}{3}M+m\right)\dot{x}+ma\dot{\theta}\cos\alpha\cos\theta=常数\qquad ③$$

而

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-ma\dot{x}\dot{\theta}\cos\alpha\sin\theta+mga\cos\alpha\sin\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ma^2\dot{\theta}\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha\right)+ma\dot{x}\cos\alpha\cos\theta$$

代入①式得

$$ma\ddot{\theta}\left(\cos^2\alpha+\frac{1}{3}\sin^2\alpha+m\ddot{x}\cos\alpha\cos\theta-mg\cos\alpha\sin\theta\right)=0\qquad ④$$

联立③、④可得(先由③式两边求导，再与①式联立)

$$(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)a\ddot{\theta}-9am\cos^2\alpha\cos\theta\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}\cos\theta)+$$

$$(5M+3m)3g\cos\alpha\sin\theta=0\qquad ⑤$$

⑤式乘 $2\dot{\theta}$ 并积分得：

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2$$

$$=6g(5M+3m)\cos\alpha\cos\theta+常数$$

又由于当 $\dot{\theta}=0$，则 $\theta=\beta$

故常数 $=-6g(5M+3m)\cos\alpha\cos\beta$

$$[(5M+3m)(3\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)-9m\cos^2\alpha\cos^2\theta]a\dot{\theta}^2$$

$$=6g(5M+3m)\cos\alpha(\cos\theta-\cos\beta)$$

5.16 半径为 r 的均质圆球，可在一具有水平轴、半径为 R 的固定圆柱的内表面滚动. 试求圆球绕平衡位置作微振动的运动

方程及其周期.

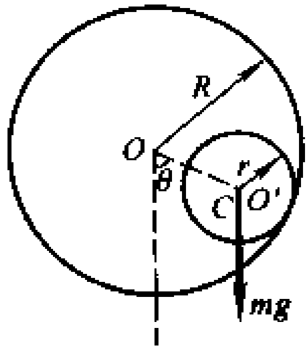
解 如题 5.16.1 图.

(1) 由已知条件可得系统自由度 $s=1$.

(2) 取广义坐标 $q=\theta$.

(3) 根据刚体力学,体系动能:

$$T=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}I_C\omega^2 \qquad ①$$



题 5.16.1 图

又 $v_c=(R-r)\dot{\theta},\omega=\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r},I_C=\frac{2}{5}mr^2$

将以上各式代入①式得:

$$T=\frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{5}mr^2\left[\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}\right]^2$$

$$=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

设原点 O 为零势能,所以体系势能

$$V=-mg(R-r)\cos\theta$$

体系的拉氏函数

$$L=T-V=\frac{7}{10}m(R-r)^2\dot{\theta}^2+mg(R-r)\cos\theta \qquad ②$$

(4) 因为体系只有重力做功,因而为保守系,故可采用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0 \qquad ③$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=-mg(R-r)\sin\theta$$

$$=-mg(R-r)\theta$$

(因为微振动,θ 很小,所以 $\sin\theta\approx\theta$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\frac{7}{5}m(R-r)^2\dot{\theta}$$

代入③式得

$$\frac{7}{5}m(R-r)^2\ddot{\theta}+mg(R-r)\theta=0$$

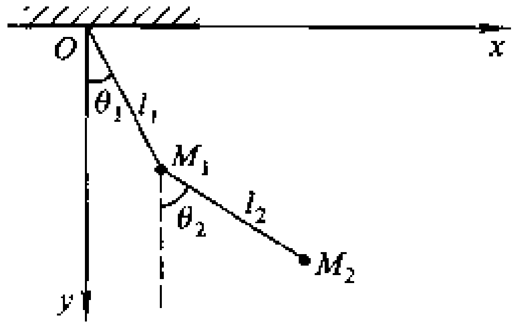
即 $$\ddot{\theta}+\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}\theta=0 \qquad ④$$

（5）解方程得

$$\theta=A\cos\left(\sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{R-r}}t+\varphi_0\right)$$

周期 $\tau=2\pi\sqrt{\frac{7}{5}\frac{R-r}{g}}$

5.17 质点 M_1，其质量为 m_1，用长为 l_1 的绳子系在固定点 O 上. 在质点 M_1 上，用长为 l_2 的绳系另一质点 M_2，其质量为 m_2. 以绳与竖直线所成的角度 θ_1 与 θ_2 为广义坐标，求此系统在竖直平面内作微振动的运动方程. 如 $m_1=m_2=m$，$l_1=l_2=l$，试再求出此系统的振动周期.



题 5.17.1 图

解 如题 5.17.1 图.

（1）由题设知： $v_1=l_1\dot{\theta}_1$

$$v_2=(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)\boldsymbol{i}+(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)\boldsymbol{j}$$

系统动能

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}M_1v_1^2+\frac{1}{2}M_2v_2^2\\&=\frac{1}{2}M_1l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}M_2(l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2+\\&\quad\frac{1}{2}M_2(l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2\\&=\frac{1}{2}(M_1+M_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}M_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+Ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) \qquad ①\end{aligned}$$

取 x 轴为势能零点，系统势能

$$V=-M_1gl_1\cos\theta_1-M_2g(l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2)$$

拉氏函数

$$\begin{aligned}L=T-V=&\frac{1}{2}(M_1+M_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}M_2l_2^2\dot{\theta}_2^2+\\&M_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)+\end{aligned}$$

$$M_1 g l_1 \cos\theta_1 + M_2 g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \quad ②$$

(2) 体系只有重力做功,为保守系,故可采用保守系拉氏方程.

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (M_1 + M_2) g l_1 \sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (M_1 + M_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

代入拉氏方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$ 得:

$$(M_1 + M_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) -$$

$$M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) +$$

$$M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (M_1 + M_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0$$

又 $M_1 = M_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, $\sin\theta_1 = \theta_1$(因为是微振动)

代入上式得 $2ml^2\ddot{\theta}_1 + ml^2\ddot{\theta}_2 + 2mgl\theta_1 = 0$

即
$$2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0 \quad ③$$

同理
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = M_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - M_2 g l_2 \sin\theta_2$$

代入 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$ 得

$$M_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + M_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) -$$

$$M_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + M_2 g l_2 \sin\theta_2 = 0$$

又 $M_1 = M_2 = m$, $l_1 = l_2 = l$, $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$, $\sin\theta_2 = \theta_2$, $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$
代入上式得

$$l\ddot{\theta}_2 + l\ddot{\theta}_1 + g\theta_2 = 0 \quad ④$$

令 $\theta_1 = A_1 e^{\lambda t}$, $\theta_2 = A_2 e^{\lambda t}$ 代入③④式得:

$$A_1(2l\lambda^2 + 2g) + A_2 l\lambda^2 = 0$$

$$A_1 l\lambda^2 + A_2(l\lambda^2 + g) = 0$$

欲使 A_1、A_2 有非零解，则须有

$$\begin{vmatrix} 2(l\lambda^2 + g) & l\lambda^2 \\ l\lambda^2 & l\lambda^2 + g \end{vmatrix} = 0$$

解得 $$\lambda^2 = \frac{-4gl \pm \sqrt{(4gl)^2 - 8g^2l^2}}{2l^2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{l}g$$

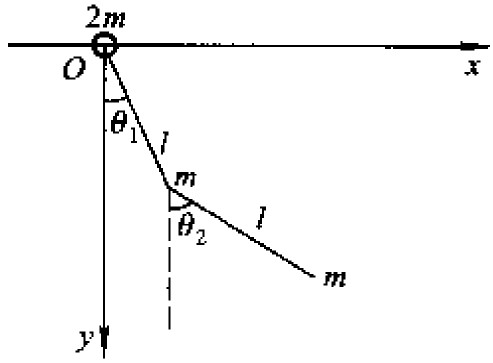
$$\lambda = \pm \mathrm{i}\left[\left(\frac{2 \mp \sqrt{2}}{l}\right)g\right]^{\frac{1}{2}}$$

周期 $$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(2+\sqrt{2})}}$$

$$\tau_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g(2-\sqrt{2})}}$$

5.18 在上题中，如双摆的上端不是系在固定点 O 上，而是系在一个套在光滑水平杆上、质量为 $2m$ 的小环上，小环可沿水平杆滑动．如 $m_1 = m_2 = m$，$l_1 = l_2 = l$，试求其运动方程及其周期．

解 如题 5.18.1 图



题 5.18.1 图

(1) 系统自由度 $s = 3$.

(2) 取广义坐标 $q_1 = x$，$q_2 = \theta_1$，$q_3 = \theta_2$；广义速度 $\dot{q}_1 = \dot{x}_1$，$\dot{q}_2 = \dot{\theta}_1$，$\dot{q}_3 = \dot{\theta}_2$

(3) 因为是微振动，$\cos\theta_1 = \cos\theta_2 \approx 1$，$\sin\theta_1 \approx \theta_1$，$\sin\theta_2 \approx \theta_2$，

体系动能：

$$T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m[(x + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]^2$$

以 Ox 为势能零点，体系势能

$$V = -2mgl\cos\theta_1 - mgl\cos\theta_2$$

拉氏函数

$$L = T - V = m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + l\dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2}m[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]^2 +$$

$$2mgl\cos\theta_1 + mgl\cos\theta_2$$

(4) $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + m[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 4m\ddot{x} + 2ml\ddot{\theta}_1 + ml\ddot{\theta}_2 = 0$$

即

$$4\ddot{x} + 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 = 0 \qquad ①$$

同理，

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -2mgl\sin\theta_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = ml(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + ml[(x + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \ddot{\theta}_1} = 0$$

$$ml(\ddot{x} + l\ddot{\theta}_1) + ml[(\ddot{x} + l\ddot{\theta}_1) + l\ddot{\theta}_2] + 2mgl\sin\theta_1 = 0$$

$$2\ddot{x} + 2l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_1 = 0 \qquad ②$$

同理，

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -mgl\sin\theta_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ddot{\theta}_2} = ml[(\dot{x} + l\dot{\theta}_1) + l\dot{\theta}_2]$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = 0$$

$$ml[(\dot{x} + l\ddot{\theta}_1) + l\ddot{\theta}_2] + mgl\sin\theta_2 = 0$$

$$\ddot{x} + l\dot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_2 + g\theta_2 = 0 \qquad ③$$

设

$$x = A\mathrm{e}^{\lambda t}, \theta_1 = A_1\mathrm{e}^{\lambda t}, \theta_2 = A_2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = A\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \ddot{\theta}_1 = A_1\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}, \ddot{\theta}_2 = A_2\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t}$$

代人①②③式得

$$
\left.\begin{aligned}
4A\lambda^2 + 2A_1 l\lambda^2 + A_2 l\lambda^2 = 0 \\
2A\lambda^2 + 2A_1(l\lambda^2 + g) + A_2 l\lambda^2 = 0 \\
A\lambda^2 + A_1 l\lambda^2 + A_2(l\lambda^2 + g) = 0
\end{aligned}\right\}
$$

欲使 A、A_1、A_2 有非零解，必须

$$
\begin{vmatrix}
4\lambda^2 & 2l\lambda^2 & l\lambda^2 \\
2\lambda^2 & 2(l\lambda^2 + g) & l\lambda^2 \\
\lambda^2 & l\lambda^2 & l\lambda^2 + g
\end{vmatrix} = 0
$$

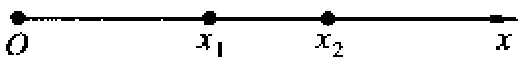
解之 $$4\lambda^2(l\lambda^2 + g)(l\lambda^2 + 4g) = 0$$

又 $\lambda \neq 0$

故可得 $$\lambda_1 = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{g}{l}};\ \lambda_2 = \pm \mathrm{i}\sqrt{\frac{4g}{l}}$$

周期 $$\tau_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\ \tau_2 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

5.19 质量分别为 m_1、m_2 的二原子分子，平衡时原子间的距离为 a，它们的相互作用力是准弹性的，取二原子的联线为 x 轴，试求此分子的运动方程.



题 5.19.1 图

解 如题 5.19.1 图

(1) 体系自由度 $s = 2$.

(2) 取广义坐标 $q_1 = x_1, q_2 = x_2$；广义速度 $\dot{q}_1 = \dot{x}_1, \dot{q}_2 = \dot{x}_2$.

(3) 体系动能 $$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2$$

体系势能 $$V = \frac{1}{2}k[(x_2 - x_1) - a]^2$$

体系的拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - a)^2$$

(4) 体系中只有弹力做功，体系为保守系，可用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad ①$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = k(x_2 - x_1 - a), \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1 - a), \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$$

将以上各式代入①式得：

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 + ka = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 - ka = 0 \end{aligned}\right\} \quad ②$$

先求齐次方程

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + kx_2 - kx_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad ③$$

设
$$x_1 = Ae^{\lambda t}, x_2 = Be^{\lambda t}$$

$$\ddot{x}_1 = A\lambda^2e^{\lambda t}, \ddot{x}_2 = B\lambda^2e^{\lambda t}$$

代入③式得
$$A(m_1\lambda^2 + k) - Bk = 0$$

$$-kA + B(\lambda^2 m_2 + k) = 0$$

要使 A、B 有非零解，必须

$$\begin{vmatrix} m_1\lambda^2 + k & -k \\ -k & m_2\lambda^2 + k \end{vmatrix} = 0$$

即
$$m_1m_2\lambda^4 + m_1\lambda^2k + m_2\lambda^2k = 0$$

又 $\lambda \neq 0$

故
$$\lambda^2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}k$$

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}k}$$

通解为：

$$\left.\begin{aligned} x_1 = A + Bt + C_1\sin(\nu t + \varepsilon) \\ x_2 = A + Bt + C_2\sin(\nu t + \varepsilon) \end{aligned}\right\}$$

其中
$$\nu = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}k}$$

又存在特解
$$\left.\begin{aligned} x_1 = 0 \\ x_2 = a \end{aligned}\right\}$$

由②③式可得 $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$

$$B = -\frac{m_1}{m_2}A$$

即
$$C_2 = -\frac{m_1}{m_2}C_1$$

$$x_1 = A + Bt + C\sin(\nu t + \varepsilon)$$

$$x_2 = A + Bt + a - \frac{m_1}{m_2}C\sin(\nu t + \varepsilon)$$

式中 A、B、C 及 ε 为积分常数，$\nu = \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}\cdot k$，$k$ 为倔强系数.

5.20 已知一带电粒子在电磁场中的拉格朗日函数 L（非相对论的）为

$$L = T - q\varphi + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}mv^2 - q\varphi + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为粒子的速度，m 为粒子的质量，q 为粒子所带的电荷，φ 为标量势，$\boldsymbol{A}$ 为矢量势. 试由此写出它的哈密顿函数.

解 以速度为广义速度 $\dot{q} = \boldsymbol{v}$，根据定义 $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} \qquad ①$$

根据公式(5.5.10)

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^{s} \boldsymbol{p}_\alpha \cdot \dot{q}_\alpha - L \\ &= (m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{v} - (T - q\varphi + q\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi \end{aligned}$$

又由①得
$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A}}{m}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\,\frac{(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2}{m^2} + q\varphi \\ &= \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\varphi \end{aligned}$$

5.21 试写出自由质点在作匀速转动的坐标系中的哈密顿函数的表示式.

解 取在转动坐标系的速度为广义速度 $\boldsymbol{v}'=\dot{q}$,则在固定坐标系中的速度:$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$,自由质点的动能 $T=\frac{1}{2}mv^2$,设质点势能为 V,则质点的拉氏函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}mv^2-V$$

根据定义: $$\boldsymbol{p}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{\partial \boldsymbol{v}'}=\frac{1}{2}m\frac{\partial(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})^2}{\partial \boldsymbol{v}'}=m\boldsymbol{v}$$

在转动坐标系中:

$$\begin{aligned}H&=\sum_{\alpha=1}^{s}\boldsymbol{p}_\alpha\cdot\dot{q}_\alpha-L\\&=m\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'-\frac{1}{2}mv^2+V\\&=m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})-\frac{1}{2}mv^2+V\\&=\frac{1}{2}mv^2-m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})+V\\&=\frac{1}{2m}p^2-(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{p}+V\\&=\frac{1}{2m}p^2-\boldsymbol{\Omega}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})+V\end{aligned}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为质点的位矢,$\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{v}$ 为质点相对于固定坐标系的速度.

5.22 试写出§3.9中拉格朗日陀螺的哈密顿函数 H,并由此求出它的三个第一积分.

解 取广义坐标 $q_1=\theta,q_2=\psi,q_3=\varphi$.根据教材(3.9.21)和(3.9.19)式得动能:$T=\frac{1}{2}[I_1(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2]$

势能:$V=mgl\cos\theta$,l 为离原点距离.

故 $$\begin{aligned}H&=T+V\\&=\frac{1}{2}[I_1(\dot{\theta}^2+\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)+I_3(\dot{\varphi}\cos\theta+\dot{\psi})^2]+mgl\cos\theta\end{aligned}$$

根据定义式 $p_\alpha = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha}$,有 $p_\theta = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$

$$p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2\theta + I_3 \cos\theta (\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$p_\psi = I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

故 $$H = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{I_1} p_\theta^2 + \frac{1}{I_1 \sin^2\theta}(p_\varphi - p_\psi)^2 + \frac{1}{I_3} p_\psi^2\right] + mgl\cos\theta$$

$$= \frac{1}{2I_1} p_\theta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1 \sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

因为 $$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H] = 0 + 0 = 0$$

所以 $H = C_1$ 为第一积分.

又 $\dfrac{\partial p_\psi}{\partial p_\theta} = 0, \dfrac{\partial p_\psi}{\partial p_\psi} = 1, \dfrac{\partial p_\psi}{\partial p_\varphi} = 0, \dfrac{\partial p_\psi}{\partial \theta} = -I_3 \dot{\varphi}\sin\theta, \dfrac{\partial p_\psi}{\partial \psi} = 0, \dfrac{\partial p_\psi}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = 0, \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I} = \dot{\theta} = 0$$

故 $$[p_\psi, H] = 0$$

即 $$\dot{p}_\psi = 0$$

得 $p_\psi = C_2$ 为第二个第一积分.

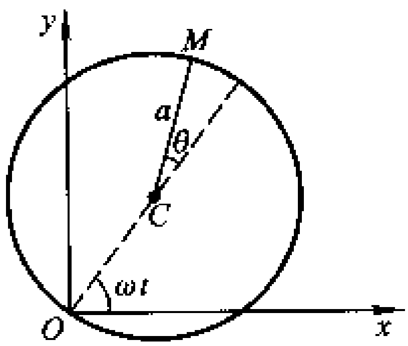
同理 $\dfrac{\partial p_\varphi}{\partial p_\theta} = 0, \dfrac{\partial p_\varphi}{\partial p_\psi} = 0, \dfrac{\partial p_\varphi}{\partial p_\varphi} = 1, \dfrac{\partial p_\varphi}{\partial \theta} \neq 0, \dfrac{\partial p_\varphi}{\partial \psi} = 0, \dfrac{\partial p_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot{\theta} = 0$

$$[p_\varphi, H] = 0$$

即 $\dot{p}_\varphi = 0$

得 $p_\varphi = C_3$ 为第三个第一积分.

5.23 试用哈密顿正则方程解 4.10 题.



题 5.23.1 图

解 如题 5.23.1 图,由 5.6 题解得小球的动能

$$T=\frac{1}{2}m\left(4a^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$$
$$\left.+4a^2\omega\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}+a^2\dot{\theta}^2\right) \quad ①$$

根据定义

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=ma^2\dot{\theta}+2ma^2\omega\cos^2\frac{\theta}{2} \quad ②$$

得
$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{ma^2}-2\omega\cos^2\frac{\theta}{2} \quad ③$$

根据哈密顿函数的定义

$$H=p_\theta\dot{\theta}-L=p_\theta\dot{\theta}-T+V$$
$$=p_\theta\dot{\theta}-\frac{1}{2}m\left(4a^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right.$$
$$\left.+4a^2\omega\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}+a^2\dot{\theta}^2\right)+V$$

代入③式后可求得：

$$H=\frac{p_\theta^2}{2ma^2}-2\omega p_\theta\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}ma^2\omega^2\sin^2\theta \quad ④$$

由正则方程得：

$$\dot{p}_\theta=\frac{-\partial H}{\partial\theta}=-\omega p_\theta\sin\theta+ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta \quad ⑤$$

$$\dot{\theta}=\frac{\partial H}{\partial p_\theta}=\frac{p_\theta}{ma^2}-2\omega\cos^2\frac{\theta}{2} \quad ⑥$$

对⑥式两边对时间 t 求导得

$$\ddot{\theta}=\frac{\dot{p}_\theta}{ma^2}+\omega\dot{\theta}\sin\theta$$

代入⑤得

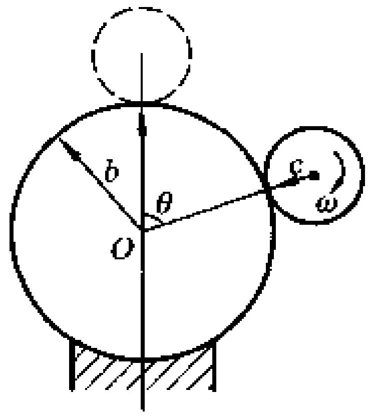
$$\ddot{\theta}=\frac{-\omega p_\theta\sin\theta+ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta}{ma^2}+\omega\dot{\theta}\sin\theta$$
$$=-\omega^2\sin\theta$$

整理得：
$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$

5.24 半径为 c 的均质圆球，自半径为 b 的固定圆球的顶端无

初速地滚下，试由哈密顿正则方程求动球球心下降的切向加速度.

解 如题 5.24.1 图.



题 5.24.1 图

(1) 小球的位置可由 θ 确定，故自由度 $s=1$.

(2) 选广义坐标 $q=\theta$，广义速度 $\dot{q}=\dot{\theta}$.

(3) 小球动能

$$T=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I_0\omega^2 \qquad ①$$

又由 $v_1=(c+b)\dot{\theta}$，$\omega=\frac{v_1}{c}=\frac{c+b}{c}\dot{\theta}$，代入①式得

$$T=\frac{1}{2}m(c+b)^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mc^2\left(\frac{c+b}{c}\dot{\theta}\right)^2$$

$$=\frac{7}{10}m\dot{\theta}^2(c+b)^2$$

设小球势能为 V，取固定圆球中心 O 为零势能点，则

$$V=mg(c+b)\cos\theta$$

小球拉氏函数

$$L=T-V=\frac{7}{10}m\dot{\theta}^2(c+b)^2-V$$

$$=\frac{7}{10}m\dot{\theta}(c+b)^2-mg(c+b)\cos\theta \qquad ②$$

根据定义

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=\frac{7}{5}m\dot{\theta}(c+b)^2$$

$$\dot{\theta}=\frac{5}{7}\frac{p_\theta}{m(c+b)^2}$$

有

$$H=p_\theta\dot{\theta}-L$$

$$=p_\theta\left[\frac{5}{7}\frac{p_\theta}{m(c+b)^2}\right]-\frac{7}{10}m\left[\frac{5p_\theta}{7m(c+b)^2}\right]^2$$

$$\cdot(c+b)^2+mg(c+b)\cos\theta$$

$$=\frac{5p_\theta^2}{14m(c+b)^2}+mg(c+b)\cos\theta \qquad ③$$

(4) 根据正则方程

$$\dot{p}_\theta = \frac{\partial H}{\partial \theta} = mg(c+b)\sin\theta \qquad ④$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{5p_\theta}{7m(c+b)^2} \qquad ⑤$$

对⑤式两边求时间导得：

$$\ddot{\theta} = \frac{5\dot{p}_\theta}{7m(c+b)^2} = \frac{5mg(c+b)\sin\theta}{7m(c+b)^2} = \frac{5g\sin\theta}{7(c+b)}$$

故小球球心切向加速度 $a = (c+b)\ddot{\theta} = \frac{5}{7}g\sin\theta$

5.25 试求由质点组的动量矩 $\boldsymbol{J}$ 的笛卡儿分量所组成的泊松括号.

解 根据第二章§2.3的公式有：

$$\left.\begin{aligned} J_x &= \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i\dot{z}_i - z_i\dot{y}_i) = \sum_{i=1}^{n}(y_ip_{iz} - z_ip_{iy}) \\ J_y &= \sum_{i=1}^{n} m_i(z_i\dot{x}_i - x_i\dot{z}_i) = \sum_{i=1}^{n}(z_ip_{ix} - x_ip_{iz}) \\ J_z &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i\dot{y}_i - y_i\dot{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}(x_ip_{iy} - y_ip_{ix}) \end{aligned}\right\} \qquad ①$$

根据泊松括号的定义：

$$[\varphi,\psi] = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial q_\alpha}\right) \qquad ②$$

所以 $$[J_x,J_x] = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\right) = 0$$

同理知： $$[J_y,J_y] = 0,\ [J_z,J_z] = 0$$

由②得：
$$[J_x,J_y] = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial J_y}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial J_y}{\partial q_\alpha}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial J_x}{\partial x_i}\frac{\partial J_y}{\partial p_{ix}} - \frac{\partial J_x}{\partial p_{ix}}\frac{\partial J_y}{\partial x_i}\right) + \right.$$

$$\left(\frac{\partial J_x}{\partial y_i}\frac{\partial J_y}{\partial p_{iy}}-\frac{\partial J_x}{\partial p_{iy}}\frac{\partial J_y}{\partial y_i}\right)+\left(\frac{\partial J_x}{\partial z_i}\frac{\partial J_y}{\partial p_{iz}}-\frac{\partial J_x}{\partial p_{iz}}\frac{\partial J_y}{\partial z_i}\right)\Bigg]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i p_{iy}-y_i p_{ix})=J_z$$

同理可得：$[J_y,J_z]=J_x$，$[J_z,J_x]=J_y$

5.26 试求由质点组的动量 $\boldsymbol{p}$ 和动量矩 $\boldsymbol{J}$ 的笛卡儿分量所组成的泊松括号。

解 由题 5.25 可知 J_x、J_y、J_z 的表达式

因为 $\quad \dfrac{\partial p_\alpha}{\partial p_\alpha}=1,\dfrac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta}=0;\dfrac{\partial p_y}{\partial x}=0,\dfrac{\partial p_z}{\partial y}=0,\dfrac{\partial p_y}{\partial z}=0$

故
$$[J_x,p_y]=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial J_x}{\partial q_\alpha}\frac{\partial p_y}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial J_x}{\partial p_\alpha}\frac{\partial p_y}{\partial q_\alpha}\right)$$
$$=\frac{\partial J_x}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(y_i p_{iz}-z_i p_{iy})}{\partial y_i}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}p_{iz}=p_z$$

同理可求得：

$$[J_z,p_y]=\frac{\partial J_z}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(x_i p_{iy}-y_i p_{ix})}{\partial y_i}=\sum_{i=1}^{n}-p_{ix}=-p_x$$

$$[J_y,p_y]=\frac{\partial J_y}{\partial y}=0$$

$$[J_y,p_z]=p_x,[J_y,p_x]=\quad p_z$$

$$[J_x,p_z]=-p_y,[J_x,p_x]=0$$

$$[J_z,p_x]=p_y,[J_z,p_z]=0$$

即：
$$[J_x,p_y]=p_z,[J_y,p_z]=p_x,[J_z,p_x]=p_y$$
$$[J_x,p_z]=-p_y,[J_y,p_x]=-p_z,[J_z,p_y]=-p_x$$
$$[J_x,p_x]=0,[J_y,p_y]=0,[J_z,p_z]=0$$

5.27 如果 φ 是坐标和动量的任意标量函数，即 $\varphi=a\boldsymbol{r}^2+b\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}+c\boldsymbol{p}^2$，其中 a,b,c 为常数，试证

$$[\varphi,\boldsymbol{J}_z]=0$$

证 取广义坐标 $q_{1i}=x_i, q_{2i}=y_i, q_{3i}=z_i, i=1,2,\cdots,n$

因为
$$J_{iz}=x_ip_{iy}-y_ip_{ix}$$

$$\varphi_i=ar_i^2+b\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{p}_i+cp_i^2=a(x_i^2+y_i^2+z_i^2)+$$
$$b(x_ip_{ix}+y_ip_{iy}+z_ip_{iz})+c(p_{ix}^2+p_{iy}^2+p_{iz}^2)$$

又因为
$$\frac{\partial J_{iz}}{\partial x_i}=-y_i,\frac{\partial J_{iz}}{\partial y_i}=-p_{ix},\frac{\partial J_{iz}}{\partial z_i}=0$$

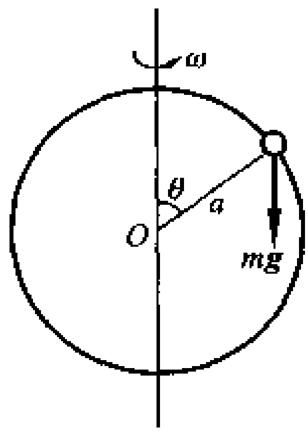
$$\frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{ix}}=-y_i,\frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{iy}}=x_i,\frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{iz}}=0$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_i}=2ax_i+bp_{ix},\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_i}=2ay_i+bp_{iy}$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_{ix}}=2cp_{ix}+bx_i,\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_{iy}}=2cp_{iy}+by_i$$

所以
$$[\varphi,J_z]=\sum_{i=1}^{n}[\varphi_i,J_{iz}]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_{i\alpha}}\frac{\partial J_{iz}}{\partial p_{i\alpha}}-\frac{\partial J_{iz}}{\partial q_{i\alpha}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_{i\alpha}}\right)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}[(2ax_i+bp_{ix})(-y_i)-p_{iy}(2cp_{ix}+bx_i)$$
$$+(2ay_i+bp_{iy})\cdot x_i-(2cp_{iy}+by_i)(-p_{ix})]$$
$$=0$$

5.28 半径为 a 的光滑圆形金属丝圈，以匀角速 ω 绕竖直直径转动，圈上套着一质量为 m 的小环. 起始时，小环自圆圈的最高点无初速地沿着圆圈滑下. 当环和圈中心的联线与竖直向上的直径成 θ 角时，用哈密顿原理求出小环的运动微分方程.



题 5.28.1 图

解 如题 5.28.1 图.

(1) 小环的位置可以由 θ 角唯一确定，因此体系的自由度 $s=1$，取广义坐标

$q=\theta$，广义速度 $\dot{q}=\dot{\theta}$.

小球的动能：

$$T=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ma^2\sin^2\theta\omega^2$$

以 O 点为势能零点，则小环势能

$$V=mga\cos\theta$$

所以拉氏函数

$$L=T-V=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}ma^2\sin^2\theta\omega^2-mga\cos\theta$$

（2）由哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}L\mathrm{d}t=0$$

故 $$\int_{t_1}^{t_2}(ma^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}+ma^2\sin\theta\cos\theta\delta\theta\omega^2+mga\sin\theta\delta\theta)\mathrm{d}t=0$$

又因为 $$\dot{\theta}\delta\dot{\theta}=\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\theta}\delta\theta-\ddot{\theta}\delta\theta$$

所以 $$\int_{t_1}^{t_2}ma^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}\,\delta\theta)\mathrm{d}t+$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(ma^2\sin\theta\cos\theta\omega^2+mga\sin\theta-ma^2\ddot{\theta})\,\delta\theta\mathrm{d}t=0$$

$$ma^2\dot{\theta}\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}(ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mga\sin\theta-ma^2\ddot{\theta})\delta\theta\mathrm{d}t=0$$

又由于 $$\delta\theta\Big|_{t_1}=0,\delta\theta\Big|_{t_2}=0$$

所以 $$\int_{t_1}^{t_2}(ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mga\sin\theta-ma^2\ddot{\theta})\delta\theta\mathrm{d}t=0$$

因为 $\delta\theta$ 是任意的，所以有被积式为 0，即

$$ma^2\omega^2\sin\theta\cos\theta+mga\sin\theta-ma^2\ddot{\theta}=0$$

化简得： $$ma\ddot{\theta}=ma\omega^2\sin\theta\cos\theta+mg\sin\theta$$

5.29 试用哈密顿原理解 4.10 题.

解 参考 5.23 题，设 $V=0$，体系的拉氏函数

$$L=\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2+2ma^2\omega\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}+2ma^2\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad ①$$

根据哈密顿原理

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\mathrm{d}t=0$$

故 $$\int_{t_1}^{t_2}\left[ma^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}+2ma^2\omega\delta\left(\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)-ma^2\omega^2\sin\theta\delta\theta\right]\mathrm{d}t=0 \qquad ②$$

因为 $\dot{\theta}\delta\dot{\theta}=\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\theta}\delta\theta)-\ddot{\theta}\delta\theta$

$$\dot{\theta}\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\sin\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

所以

$$ma^2\dot{\theta}\,\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}+ma^2\omega\delta(\sin\theta+\theta)\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}ma^2(\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta)\delta\theta\mathrm{d}t=0$$

又因为 $\delta\theta\Big|_{t_1}=0$，$\delta\theta\Big|_{t_2}=0$，且 $\delta(\sin\theta+\theta)\Big|_{t_1}^{t_2}=(\cos\theta\delta\theta+\delta\theta)\Big|_{t_1}^{t_2}=0$

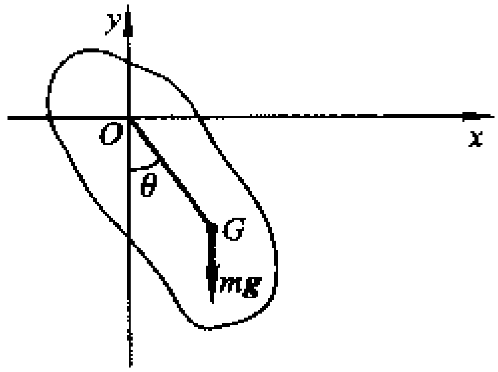
$$\int_{t_1}^{t_2}ma^2(\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta)\delta\theta\mathrm{d}t=0 \qquad ③$$

因为 $\delta\theta$ 是任意的，所以有

$$\ddot{\theta}+\omega^2\sin\theta=0$$

5.30 试用哈密顿原理求复摆作微振动时的周期.

解 如题 5.30.1 图，复摆位置可由角度 θ 唯一确定，自由度 $s=1$，取广义坐标 $q=\theta$，设 l 为复摆重心 G 与悬点 O 之间的距离.



题 5.30.1 图

复摆的动能：

$$T=\frac{1}{2}I_0\omega^2=\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2$$

取 x 为零势点，则势能：

$$V = -mgl\cos\theta$$

复摆的拉氏量：$L = T - V = \frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$ ①

由哈密顿原理：$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt = 0$

故 $$\int_{t_1}^{t_2}(I_0\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta} - mgl\sin\theta\delta\theta)dt = 0$$

又因为 $$\dot{\theta}\delta\dot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d}{dt}\delta\theta = \frac{d}{dt}(\dot{\theta}\delta\theta) - \ddot{\theta}\delta\theta$$

故 $$I_0\dot{\theta}\,\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}(I_0\ddot{\theta} + mgl\sin\theta)\delta\theta dt = 0$$

又因为 $$\delta\theta\Big|_{t_1} = \delta\theta\Big|_{t_2} = 0$$

所以 $$\int_{t_1}^{t_2}(I_0\ddot{\theta} + mgl\sin\theta)\delta\theta dt = 0$$ ②

因为 $\delta\theta$ 的任意性所以有：

$$I_0\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0$$

根据已知 θ 很小，$\sin\theta\approx\theta$，所以

$$I_0\ddot{\theta} + mgl\theta = 0$$ ③

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I_0}\theta = 0$$

可求得：$\theta = A\sin\left(\sqrt{\frac{mgl}{I_0}}t + \varphi\right)$，其中 φ 为初相位.

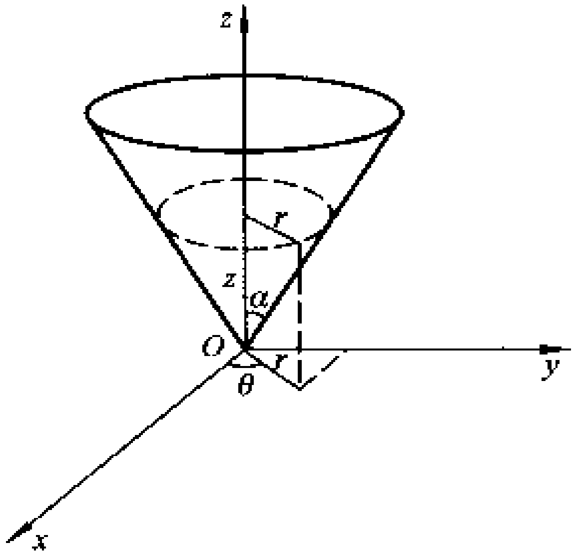
周期 $$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}$$

5.31 试用哈密顿原理解 5.9 题.

解 如题 5.31.1 图，参考题 5.9，体系的拉氏函数

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{r}^2\cot^2\alpha) - mgr\cot\alpha$$ ①

根据哈密顿原理： $$\int_{t_1}^{t_2}\delta L\,dt = 0$$



题 5.31.1 图

故 $$\int_{t_1}^{t_2}[(m\dot{r}\delta\dot{r}+mr\dot{\theta}^2\delta r+mr^2\dot{\theta}\,\delta\dot{\theta}+m\dot{r}\cot^2\alpha\,\delta\dot{r})$$

$$-mg\cot\alpha\,\delta r]\mathrm{d}t=0 \qquad ②$$

因为 $$\dot{r}\delta\dot{r}=\dot{r}\delta\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\dot{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta r)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\delta r)-\ddot{r}\delta r$$

$$r^2\dot{\theta}\delta\dot{\theta}=r^2\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\theta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}\delta\theta)-r^2\ddot{\theta}\delta\theta-2r\dot{r}\dot{\theta}\delta\theta$$

代入②式得：

$$\int_{t_1}^{t_2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\delta r)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}\,\delta\theta)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}m\cot^2\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}\delta r)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}[m(1+\cot^2\alpha)\ddot{r}-mr\dot{\theta}^2+mg\cot^2\alpha]\delta r\mathrm{d}t-$$

$$\int_{t_1}^{t_2}m(r^2\ddot{\theta}+2r\dot{r}\dot{\theta})\delta\theta\mathrm{d}t=0$$

所以 $$m\dot{r}\delta r\Big|_{t_1}^{t_2}+mr^2\dot{\theta}\,\delta\theta\Big|_{t_1}^{t_2}+m\cot^2\alpha\dot{r}\delta r\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{\sin^2\alpha}(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$$

$$\cdot\sin^2\alpha+g\sin\alpha\cdot\cos\alpha)\delta r\mathrm{d}t-\int_{t_1}^{t_2}m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta})\delta\theta\mathrm{d}t=0 \qquad ③$$

又因为 $\delta r\,|_{t_1}=\delta r\,|_{t_2}=0,\delta\theta\,|_{t_1}=\delta\theta\,|_{t_2}=0$，且 δr 和 $\delta\theta$ 的任意性

所以 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

所以运动微分方程为：$r^2\dot{\theta}=$ 常数

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}\sin^2\alpha + g\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

5.32 试证

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right), P = q\cot p$$

为一正则变换.

证

$$\begin{aligned}
& P\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q \\
&= P\mathrm{d}q - q\cot p\,\mathrm{d}\left[\ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right)\right] \\
&= P\mathrm{d}q - q\cot p\cdot\frac{q}{\sin p}\mathrm{d}\left(\frac{1}{q}\sin p\right) \\
&= P\mathrm{d}q - \frac{q^2\cos p}{\sin^2 p}\cdot\frac{q\cos p\,\mathrm{d}p - \sin p\,\mathrm{d}q}{q^2} \\
&= P\mathrm{d}q - q\cot^2 p\,\mathrm{d}p + \cot p\,\mathrm{d}q \\
&= P\mathrm{d}q - q\cot^2 p\,\mathrm{d}p + \mathrm{d}q\cot p + q\sec^2 p\,\mathrm{d}P \\
&= P\mathrm{d}q + q\mathrm{d}P + \mathrm{d}q\cot p \\
&= \mathrm{d}(Pq) + \mathrm{d}q\cot p \\
&= \mathrm{d}[q(P + \cot p)] = \mathrm{d}U
\end{aligned}$$

因为母函数不是 t 的显函数，为正则变换.

5.33 证：变换方程

$$q = (2Q)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos P, p = (2Q)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\sin P$$

代表一正则变换，并将正则方程

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

变为

$$\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial P}, \dot{P} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q}$$

式中

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2q^2), H^* = kQ$$

证 由 $P\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$

$$= (2Q)^{\frac{1}{2}}k^{\frac{1}{2}}\sin P\mathrm{d}(2Q)^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos P - P\mathrm{d}Q$$
$$= \sin P\cos P\mathrm{d}Q - 2Q\sin^2 P\mathrm{d}P - P\mathrm{d}Q$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2P\mathrm{d}Q + Q\cos 2P\mathrm{d}P - Q\mathrm{d}P - P\mathrm{d}Q$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{d}(Q\sin 2P) - \mathrm{d}(PQ)$$
$$= \mathrm{d}[Q(\sin P\cos P - P) = \mathrm{d}U$$

$U = Q(\sin P\cos P - P)$为母函数，故为正则变换.

又
$$H = \frac{1}{2}(p^2 + k^2q^2) = \frac{1}{2}[2Qk\sin^2 P + 2Qk\cos^2 P]$$
$$= kQ$$

且
$$\frac{\partial U}{\partial t} = H - H^* = 0$$

当
$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \text{变为}\dot{Q} = \frac{\partial H^*}{\partial p}, \dot{P} = -\frac{\partial H^*}{\partial Q}\text{时}$$
$$H^* = kQ$$

5.34 如果利用下列关系把变数 p, q 换为P, Q：

$$q = \varphi_1(P, Q), p = \varphi_2(P, Q)$$

则当

$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = 1$$

时，这种变换是一正则变换，试证明之.

证 由 $P\mathrm{d}q - P\mathrm{d}Q$

$$= \varphi_2\mathrm{d}\varphi_1 - P\mathrm{d}Q$$
$$= \varphi_2\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial P}\mathrm{d}P + \frac{\partial\varphi_1}{\partial Q}\mathrm{d}Q\right) - P\mathrm{d}Q$$
$$= \left(\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial Q} - P\right)\mathrm{d}Q + \varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\mathrm{d}p \quad ①$$

又
$$\frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} = 1$$

故
$$\frac{\partial q}{\partial Q}\cdot\frac{\partial p}{\partial P}-\frac{\partial q}{\partial P}\cdot\frac{\partial p}{\partial Q}=1$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial P}-\frac{\partial \varphi_1}{\partial P}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial Q}=1 \qquad ②$$

由于
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial P}=\frac{\partial\left(\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q}\right)}{\partial P}-\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial P\partial Q}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial P}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial Q}=\frac{\partial\left(\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial P}\right)}{\partial Q}-\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial P\partial Q}$$

代入②式得

$$\frac{\partial\left(\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q}\right)}{\partial P}-\frac{\partial\left(\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial P}\right)}{\partial Q}=1$$

得
$$\frac{\partial\left(\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q}-P\right)}{\partial P}=\frac{\partial\left(\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial P}\right)}{\partial Q}$$

所以存在母函数 $U(P,Q)$ 使：

$$\frac{\partial U}{\partial P}=\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial P}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q}=\varphi_2\frac{\partial \varphi_1}{\partial Q}-P$$

因此，这种变换是正则变换.

5.35 试利用正则变换，由正则方程求竖直上抛的物体的运动规律. 已知本问题的母函数 $U=mg\left(\frac{1}{6}gQ^3+qQ\right)$，式中 q 为确定物体位置的广义坐标，Q 为变换后新的广义坐标，g 为重力加速度.

解 由于 $U=mg\left(\frac{1}{6}gQ^3+qQ\right)$

故
$$p=\frac{\partial U}{\partial q}=mgQ \qquad ①$$

$$p=\frac{-\partial U}{\partial Q}=-\frac{1}{2}mg^2Q^2-mgq \qquad ②$$

由②得 $$q=-\frac{p}{mg}-\frac{1}{2}gQ^2$$

又 $$\frac{\partial U}{\partial t}=0$$

有 $$H=H^*$$

又 $p=\frac{\partial H}{\partial \dot{q}}=m\dot{q}$,

$$H=\frac{1}{2}m\dot{q}^2+mgq=\frac{p^2}{2m}+mgq$$

$$=\frac{1}{2m}(mgQ)^2-p-\frac{1}{2}mg^2Q^2=-p=H^* \qquad ③$$

$$\dot{Q}=\frac{\partial H^*}{\partial p}=-1$$

$$Q=-t+C_1 \qquad ④$$

又 $$\dot{p}=\frac{-\partial H^*}{\partial Q}=0$$

故 $$p=C_2 \qquad ⑤$$

当 $t=0$ 时,$q=0,\dot{q}=v_0$

由③式得: $p=-\frac{1}{2}mv_0^2$,即 $C_2=-\frac{1}{2}mv_0^2$

$$q=\frac{1}{2g}v_0^2-\frac{1}{2}g(-t+C_1)^2$$

当 $t=0$ 时,$q=0$

$$C_1=\frac{v_0}{g}$$

$$q=\frac{1}{2g}v_0^2-\frac{1}{2}gt^2+\frac{1}{2}gt\cdot\frac{v_0}{g}-\frac{1}{2g}v_0^2=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$$

5.36 试求质点在势场

$$V=\frac{\alpha}{r^2}-\frac{Fz}{r^3}$$

中运动时的主函数 S,式中 α 及 F 为常数.

解 采用球坐标系,质点动能

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$$

是广义速度的二次方项，所以

$$H = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + \frac{a}{r^2} - \frac{Fz}{r^3} \quad ①$$

根据定义

$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r},\ \dot{r} = \frac{p_r}{m} \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta},\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta} \end{aligned}\right\} \quad ②$$

将②代入①得：

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r{}^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi{}^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{a}{r^2} - \frac{F\cos\theta}{r^2} = E \quad ③$$

又因 H 不显含时间 t，有哈密顿－雅可比特性函数

$$S = -Et + \omega(r,\theta,\varphi,E) = -Et + \omega_r(r) + \omega_\theta(\theta) + \omega_\varphi(\varphi)$$

且

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \omega}{\partial q_\alpha}$$

故

$$p_r = \frac{d\omega_r}{dr},\ p_\theta = \frac{d\omega_\theta}{d\theta},\ p_\varphi = \frac{d\omega_\varphi}{d\varphi}$$

故

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{d\omega_r}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{d\omega_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2\right] + \frac{a}{r^2} - \frac{F\cos\theta}{r^2} = E$$

$$r^2\left(\frac{d\omega_r}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\omega_\theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\omega_\varphi}{d\varphi}\right)^2 = 2mEr^2 - 2ma + 2mF\cos\theta \quad ④$$

根据教材 5.9.10 式

$$\left.\begin{aligned} &2mEr^2 - r^2\left(\frac{d\omega_r}{dr}\right)^2 = \alpha_2 \\ &\frac{d\omega_\varphi}{d\varphi} = \alpha_3 \\ &\left(\frac{d\omega_\theta}{d\theta}\right)^2 = \alpha_2 + 2mF\cos\theta - 2ma - \frac{1}{\sin^2\theta}\alpha_3^2 \end{aligned}\right\} \quad ⑤$$

对⑤各式两边积分有

$$\omega_r(r)=\int\sqrt{2mE-\frac{\alpha_2}{r^2}}\mathrm{d}r+C_1$$

$$\omega_\theta(\theta)=\int\sqrt{\alpha_2+2mF\cos\theta-2ma-\frac{1}{\sin^2\theta}\alpha_3^2}\,\mathrm{d}\theta+C_2$$

$$\omega_\varphi(\varphi)=a_3\varphi+C_3$$

故
$$S=-Et+\int\sqrt{2mE-\frac{\alpha_2}{r^2}}\mathrm{d}r+\int\sqrt{\alpha_2+2mF\cos\theta-2ma-\frac{1}{\sin^2\theta}\alpha_3^2}\mathrm{d}\theta+a_3\varphi+C$$

其中，α_2、α_3、C 为积分常数.

5.37 试用哈密顿－雅可比偏微分方程求抛射体在真空中运动的轨道方程.

解 因为抛射体为平面运动，自由度 $s=2$，选广义坐标 $q_1=x$，$q_2=y$. 以地面为参考系，则抛射体的动能和势能分别为：

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2),V=mgy$$

根据定义广义动量：$p_x=\dfrac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m\dot{x}$，$\dot{x}=\dfrac{p_x}{m}$

$$p_y=\frac{\partial T}{\partial\dot{y}}=m\dot{y},\dot{y}=\frac{p_y}{m}$$

由已知得动能是广义速度的二次齐次式，又是稳定保守场，所以：

$$H=T+V=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+mgy=E \quad ①$$

根据哈密顿－雅可比特性函数和分离变量法有：

$$S=-Et+\omega(x,y,E)=-Et+\omega_x(x)+\omega_y(y) \quad ②$$

又
$$p_\alpha=\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}\omega_\alpha}{\mathrm{d}q_\alpha}$$

故
$$p_x=\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x},p_y=\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}y}$$

$$H = E = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}y}\right)^2\right] + mgy \qquad ③$$

根据教材 5.9.10 式有：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} = \alpha_1 \\ &\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}y}\right)^2 + mgy = \alpha_2 \\ &\frac{1}{2m}\alpha_1^2 + \alpha_2 = E \end{aligned}\right\} \qquad ④$$

积分④各式有：

$$\omega_x = \alpha_1 x + C_1$$

$$\omega_y = \int\sqrt{2m\alpha_2 - 2m^2gy}\,\mathrm{d}y = \int\sqrt{2mE - \alpha_1^2 - 2m^2gy}\,\mathrm{d}y$$

代入②式得：

$$S = -Et + \alpha_1 x + \int\sqrt{2mE - \alpha_1^2 - 2m^2gy}\,\mathrm{d}y + C$$

根据 $$\beta_i = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha_i}$$

有 $$\beta = \frac{\partial\omega}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2} = x - \int\frac{\alpha_1}{\sqrt{2mE - \alpha_1^2 - 2m^2gy}}\mathrm{d}y + C$$

$$= x + \frac{\alpha_1\sqrt{2mE - \alpha_1^2 - 2m^2gy}}{m^2g} + C' = \text{常数} \qquad ⑤$$

在初始情况下：

$$t = 0,\ x = y = 0,\ \dot{x} = v_0\cos\theta$$

$$\alpha_1 = \frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}x} = p_x = m\dot{x} = mv_0\cos\theta$$

质点总能量： $$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

代入⑤式得： $$\beta = \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} + C'$$

又 β 是常数，故

$$\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} + C' = x + \frac{mv_0\cos\theta\sqrt{m^2v_0^2 - m^2v_0^2\cos^2\theta - 2m^2gy}}{m^2g} + C'$$

即：$$\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}-x\right)\frac{mg}{v_0\cos\theta}=\sqrt{m^2v_0^2\sin^2\theta-2m^2gy}$$

代简得：$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

5.38 如力学体系的势能 V 及动能 T 可用下列二函数表示：

$$V=\frac{V_1+V_2+\cdots+V_s}{A_1+A_2+\cdots+A_s}$$

$$T=\frac{1}{2}(A_1+A_2+\cdots+A_s)(B_1\dot{q}_1^2+B_2\dot{q}_2^2+\cdots+B_s\dot{q}_s^2)$$

式中 V_α、A_α、$B_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,s)$都只是一个参数 q_α 的函数，则此力学体系的运动问题可用积分法求解，试证明之.

证 根据定义 $p_\alpha=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}$

有 $$p_\alpha=(A_1+A_2+\cdots+A_s)B_\alpha\dot{q}_\alpha$$

$$\dot{q}_\alpha=\frac{p_\alpha}{(A_1+A_2+\cdots+A_s)B_\alpha}$$

因为动能为广义速度的二次齐次式，体系稳定.

故 $$H=E=T+V$$

$$=\frac{1}{2}(A_1+A_2+A_3+\cdots+A_s)^{-1}\cdot\left(\frac{p_1^2}{B_1}+\frac{p_2^2}{B_2}+\cdots+\frac{p_s^2}{B_s}\right)+\frac{V_1+V_2+\cdots+V_s}{A_1+A_2+\cdots+A_s}$$

得 $$\frac{1}{2}\left(\frac{p_1^2}{B_1}+\frac{p_2^2}{B_2}+\cdots+\frac{p_s^2}{B_s}\right)=(A_1+A_2+\cdots+A_s)E-(V_1+V_2+\cdots+V_s) \quad ①$$

采用分离变量法： $W=w_1(q_1)+w_2(q_2)+\cdots+w_s(q_s)$

又 $$p_\alpha=\frac{\partial s}{\partial q_\alpha}=\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}=\frac{\mathrm{d}w_\alpha(q_\alpha)}{\mathrm{d}q_\alpha}$$

代入①式得：

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{B_1}\left(\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}q_1}\right)^2+\frac{1}{B_2}\left(\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}q_2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{B_s}\left(\frac{\mathrm{d}w_s}{\mathrm{d}q_s}\right)^2\right]+$$

$$(V_1+V_2+\cdots+V_s)=(A_1+A_2+\cdots+A_s)E$$

根据教材 5.9.10 式有：

$$\frac{1}{2B_\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}w_\alpha}{\mathrm{d}q_\alpha}\right)^2+V_\alpha=A_\alpha E+\alpha_\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}w_\alpha}{\mathrm{d}q_\alpha}=\sqrt{2A_\alpha B_\alpha E+2B_\alpha\alpha_\alpha-2B_\alpha V_\alpha}$$

得 $$W_\alpha=\int\sqrt{2A_\alpha B_\alpha E+2B_\alpha\alpha_\alpha-2B_\alpha V_\alpha}\,\mathrm{d}q_\alpha$$

$$W=w_1+w_2+\cdots+w_s$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{s}\int\sqrt{2A_\alpha B_\alpha E+2B_\alpha\alpha_\alpha-2B_\alpha V_\alpha}\,\mathrm{d}q_\alpha$$

5.39 试用哈密顿－雅可比方程求行星绕太阳运动时的轨道方程.

解 行星位置可由轨道平面内量度的极坐标(r,θ)给定，因此它的自由度 $s=2$，取广义坐标 $q_1=r,q_2=\theta$，所以：

动能 $$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)$$

势能 $V=\dfrac{-K^2m}{r}$，式中 K 为太阳的高斯常数；

拉氏函数： $$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)+\frac{K^2m}{r}\qquad ①$$

根据定义

$$\left.\begin{aligned}p_r&=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r},\ \dot{r}=\frac{p_r}{m}\\ p_\theta&=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta},\ \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{mr^2}\end{aligned}\right\}\qquad ②$$

这是一个自然系统，所以哈密顿函数

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\theta^2}{r^2}\right)-\frac{K^2m}{r}=E\qquad ③$$

因 H 不显含 t，故可令

$$S=-Et+W(r,\theta)\qquad ④$$

而哈密顿－雅可比偏微分方程则取教材式 5.9.8 的形式

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2\right]-\frac{K^2 m}{r}=E \qquad ⑤$$

采用分离变量法，令 $W(r,\theta)=W_1(r)+W_2(\theta)$，于是

$$\frac{\partial W_2}{\partial \theta}=\sqrt{2mEr^2+2mK^2 r-r^2\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2}=\alpha_2 \qquad ⑥$$

这样，就分开了变量，而得到两个常微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\theta}=\alpha_2\\&\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}r}=\sqrt{2mE+\frac{2mK^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\end{aligned}\right\} \qquad ⑦$$

对⑦进行积分得：

$$W=W_1+W_2=\alpha_2\theta+\int\sqrt{2mE+\frac{2mK^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,\mathrm{d}r \qquad ⑧$$

根据 5.9.12：

$$\frac{\partial W}{\partial E}=t-t_0=\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{2mE+\frac{2K^2m^2}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}} \qquad ⑨$$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\theta-\theta_0=\int_{r_0}^{r}\frac{\alpha_2\mathrm{d}r}{r\sqrt{2mEr^2+2K^2m^2r-\alpha_2^2}} \qquad ⑩$$

⑩式给出轨道方程，这个积分和 §1.9 中求行星轨道的积分极为类似.

可得
$$r=\frac{\alpha_2^2/m^2K^2}{1+\sqrt{1+2E\alpha_2^2/m^2K^2}\cos\theta}$$

可以得出此式具有离心率：

$$e=\sqrt{1+\frac{2E\alpha_2^2}{K^2m}}$$

5.40 试由(5.9.29)及(5.9.30)两式推证(5.9.31)及(5.9.32)两式.

证 从柱坐标到椭圆坐标(ξ,η,θ)的变换关系是：

$$r=\sigma\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\ z=\sigma\xi\eta \tag{5.9.29}$$

势能
$$V=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2} \tag{5.9.30}$$

动能 $T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$

$$=\frac{1}{2}m\left[\sigma^2\frac{[(1-\eta^2)\xi\dot{\xi}-(\xi^2-1)\eta\dot{\eta}]^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}+\sigma^2(\xi^2-1)\right.$$
$$\left.\cdot(1-\eta^2)\dot{\theta}^2+\sigma^2(\dot{\xi}\eta+\xi\dot{\eta})^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}m\sigma^2\left[\frac{(1-\eta^2)\xi^2}{\xi^2-1}\dot{\xi}^2+\frac{(\xi^2-1)\eta^2}{1-\eta^2}\dot{\eta}^2+(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\theta}^2\right.$$
$$\left.+\dot{\xi}^2\eta^2+\xi^2\dot{\eta}^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}m\sigma^2\left[(\xi^2-\eta^2)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2-1}+\frac{\dot{\eta}^2}{1-\eta^2}\right)+(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\theta}^2\right] \quad ①$$

根据定义 $p_\xi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}}=m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\frac{\dot{\xi}}{\xi^2-1},\ \dot{\xi}=\frac{\xi^2-1}{m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}p_\xi$

$$p_\eta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}}=m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)\frac{\dot{\eta}}{1-\eta^2},\ \dot{\eta}=\frac{1-\eta^2}{m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}p_\eta$$

$$p_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)\dot{\theta},$$

$$\dot{\theta}=\frac{p_\theta}{m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$$

因为 T 是广义速度的二次式之和，所以

$$H=T+V=\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)p_\xi^2+(1-\eta^2)p_\eta^2+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2m\sigma^2}\frac{p_\theta^2}{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\right]+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2-\eta^2}=E \quad ②$$

哈密顿—雅可比微分方程为

$$\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-\eta^2)}\left[(\xi^2-1)\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2+(1-\eta^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2+\right.$$

$$\frac{1}{2m\sigma^2(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2\Bigg]+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi^2+\eta^2}=E \qquad ③$$

因为 H 不显含 θ，所以 θ 为循环坐标，采用分离变量法可得：

$$S=-Et+p_\theta\theta+W(\xi,\eta,E)=-Et+p_\theta\theta+W_1(\xi)+W_2(\eta) \qquad ④$$

故

$$\frac{1}{2m\sigma^2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\xi}\right)^2=\frac{\alpha_2-2m\sigma a(\xi)}{(\xi^2-1)2m\sigma^2}-\frac{p_\theta^2}{2m\sigma^2(\xi^2-1)^2}+E \qquad ⑤$$

$$\frac{1}{2m\sigma^2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\eta}\right)^2=E-\frac{\alpha_2+2m\sigma b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\theta^2}{(1-\eta^2)^2} \qquad ⑥$$

积分⑤、⑥得：

$$S=-Et+p_\theta\theta+\int\sqrt{2m\sigma^2E+\frac{\alpha_2-2m\sigma^2a(\xi)}{\xi^2-1}-\frac{p_\theta}{(\xi^2-1)^2}}\,\mathrm{d}\xi$$

$$+\int\sqrt{2m\sigma^2E-\frac{\alpha_2+2m\sigma^2b(\eta)}{1-\eta^2}-\frac{p_\theta}{(1-\eta^2)^2}}\,\mathrm{d}\eta$$

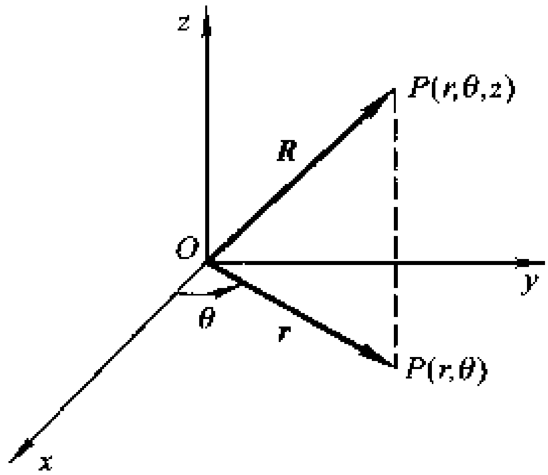
式中 p_θ,α_2,E 是积分常数.

5.41 试求质点在库仑场和均匀场

$$V=\frac{\alpha}{R}-Fz$$

的合成场中运动时的主函数 S，以抛物线坐标 ξ,η,θ 表示，式中 α 及 F 是常数，而 $R=\sqrt{r^2+z^2}$.

解 如题 5.41.1 图，根据 $z=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$，$r=\sqrt{\xi\eta}$，质点动能



题 5.41.1 图

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+\dot{z}^2)$$

$$=\frac{1}{8}m(\xi+\eta)\left(\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right)+\frac{1}{2}m\xi\eta\dot{\theta}^2 \quad ①$$

质点势能

$$V=\frac{a}{R}-Fz=\left[\frac{a}{\sqrt{\xi\eta+\frac{1}{4}(\xi-\eta)^2}}-\frac{F}{2}(\xi-\eta)\right] \quad ②$$

根据定义：

$$P_\xi=\frac{\partial T}{\partial\dot{\xi}}=\frac{1}{4}\frac{m}{\xi}(\xi+\eta)\dot{\xi}, 得\ \dot{\xi}=\frac{4P_\xi\xi}{m(\xi+\eta)}$$

$$P_\eta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\eta}}=\frac{1}{4}\frac{m}{\eta}(\xi+\eta)\dot{\eta}, 得\ \dot{\eta}=\frac{4P_\eta\eta}{m(\xi+\eta)}$$

$$P_\theta=\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}=m\xi\eta\dot{\theta}, 得\ \dot{\theta}=\frac{P_\theta}{m\xi\eta}$$

因为 T 是广义动量的二次函数，故有

$$H=T+V$$

$$=\frac{2}{m}\frac{\xi P_\xi^2+\eta P_\eta^2}{\xi+\eta}+\frac{P_\theta^2}{2m\xi\eta}+\left[\frac{a}{\sqrt{\xi\eta+\frac{1}{4}(\xi-\eta)^2}}-\frac{F}{2}(\xi-\eta)\right] \quad ③$$

因此哈密顿－雅可比方程为

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)^2\right]+\frac{1}{2m\xi\eta}\left(\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)^2+\left[\frac{a}{\sqrt{\xi\eta+\frac{1}{4}(\xi-\eta)^2}}-\frac{F}{2}(\xi-\eta)\right]=E \quad ④$$

采用分离变量法，因为 θ 是循环坐标，所以主函数

$$S=-Et+P_\theta\theta+W_1(\xi)+W_2(\eta) \quad ⑤$$

用 $m(\xi+\eta)$ 乘④式，则对 $W_1(\xi)$ 和 $W_2(\eta)$ 有

$$2\xi\left(\frac{\mathrm{d}W_1}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 - mE\xi + ma + \frac{P_\theta^2}{2\xi} - \frac{mF}{2}\xi^2 = \alpha z \qquad ⑥$$

$$2\eta\left(\frac{\mathrm{d}W_2}{\mathrm{d}\eta}\right)^2 - mE\eta + ma + \frac{P_\theta^2}{2\eta} + \frac{mF\eta^2}{2} = \alpha z \qquad ⑦$$

积分⑥⑦式,最后可得

$$S = -Et + P_\theta\theta + \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{ma - \alpha_2}{2\xi} - \frac{P_\theta^2}{4\xi^2} + \frac{mF\xi}{4}}\mathrm{d}\xi$$

$$+ \int\sqrt{\frac{mE}{2} - \frac{ma + \alpha_2}{2\eta} - \frac{P_\theta^2}{4\xi^2} - \frac{mF\eta^2}{4}}\mathrm{d}\eta$$

5.42 刘维定理的另一表达式是相体积不变定理.这里又有两种不同的说法:

(1) 考虑相宇中任何一个区域.当这区域的边界依照正则方程运动时,区域的体积在运动中不变.

(2) 相宇的体积元在正则变换下不变.试分别证明之.

证 (1) 由刘维定理得:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

考虑相空间的某一适当小的使 ρ 均匀的区域 r "体积"为

$$\int\cdots\int_r \mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\cdots\mathrm{d}p_1\cdots\mathrm{d}p_n \equiv \int_r \mathrm{d}\tau$$

所以这区域中代表点的数目:

$$N = \rho\int_r \mathrm{d}\tau$$

于是:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho\int_r \mathrm{d}\tau\right) = 0$$

即:
$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\int_r \mathrm{d}\tau + \rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_r \mathrm{d}\tau = 0$$

因为 $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$,所以有 $\int_r \mathrm{d}\tau$ 守恒.

故
$$\int_r \mathrm{d}\tau = \int_{r_0} \mathrm{d}\tau_0 = \cdots = \int_{r_n} \mathrm{d}\tau = 常数$$

证毕.

(2) 相空间体积元

$$
\left.\begin{aligned}
q_\alpha &= q_\alpha(q_{10}, q_{20}, \cdots, q_{s0}; p_{10}, \cdots, p_{s0}; t) \\
p_\alpha &= p_\alpha(q_{10}, q_{20}, \cdots, q_{s0}; p_{10}, \cdots, p_{s0}; t)
\end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1, \cdots, s)
$$

这组方程代表在任意初始条件下相空间的一条轨迹,可以把这些方程想像成 $2n$ 维空间中任意时刻 t 的坐标变换式,如果变换式的雅可比行列式不等于零,则变换是一对一的,即

$$
\frac{\partial(q_1, \cdots, q_s; p_1, \cdots, p_s)}{\partial(q_{10}, \cdots, q_{s0}; p_{10}, \cdots, p_{s0})} = 1
$$

当 $t \to t_0$ 时,变换式必趋近恒等变换,这也意味着无穷小相空间体积元在正则变换中保持不变.